Лекции по комплексному анализу, весна 2023

Домрина А.В.

10 июня 2023

Оглавление

Глава 1

Комплексные числа, последовательности и ряды комплексных чисел. Расширенная комплексная плоскость. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

1.1 Комплексные числа и операции над ними

Определение 1. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ есть множество упорядоченных пар (x, y) вещественных чисел. Точки комплексной плоскости называются *комплексными числами* и обозначаются $z = (x, y)$. Координаты x и y называются соответственно *вещественной* и *мнимой* частями комплексного числа $z = (x, y)$ и обозначаются через

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Оси абсцисс и ординат будем называть соответственно *вещественной* и *мнимой* осями. Комплексные числа, лежащие на вещественной оси, называются *вещественными* (или *действительными*), комплексные числа, лежащие на мнимой оси, называются *чисто мнимыми*.

Каждому комплексному числу $z = (x, y)$ сопоставляется комплексно сопряженное к нему число $\overline{z} = (x, -y)$.

Рассматривая множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ как вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$, можно ввести на нем структуру векторного пространства (над полем $\mathbb{R}$). Векторы $1 := (1, 0)$ и $i = (0, 1)$ образуют базис в $\mathbb{C}$, любое комплексное число $z = (x, y)$ в этом базисе имеет вид

$$z = (x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i \equiv x + iy.$$

Запись комплексного числа в виде $x+iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа. Из аксиом векторного пространства получаем формулу сложения комплексных чисел

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Введем на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ умножение, которое на базисных элементах 1 и i задается по правилу

$$1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, i \cdot i = -1,$$

а далее продолжается по линейности на все $\mathbb{C}$:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Так определенные сложение и умножение удовлетворяют всем аксиомам поля, в котором нулем является число $0 := (0, 0)$, единицей, как и выше, является число $1 = (1, 0)$, а обратным к произвольному комплексному числу $z = x + iy$, не равному нулю, является число

$$z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, $\mathbb{C}$ является полем комплексных чисел. Основным отличием поля $\mathbb{C}$ от полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ является его *алгебраическая замкнутость*: каждый непостоянный полином с комплексными коэффициентами имеет в $\mathbb{C}$ корень. Это свойство следует из основной теоремы алгебры, несколько доказательств которой будут предложены в курсе.

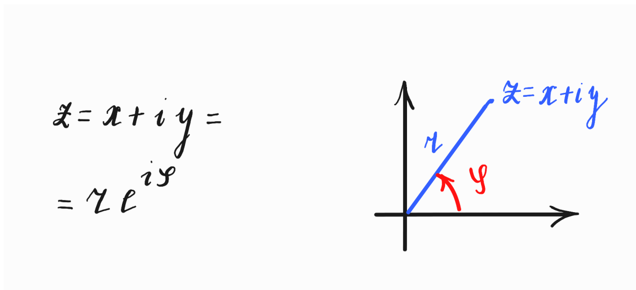


Рис. 1.1:

Полярное представление. Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Используя полярные координаты $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, имеем полярное представление

$$z = re^{i\phi} := r\cos\phi + ir\sin\phi. \tag{1.1}$$

Величина $r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$. Отметим, что угол ϕ представлении (1.1) определен неоднозначно. Если $z = 0$, то он может быть любым. Если $z \neq 0$, то угол ϕ определен с точностью до 2π. Пусть $\arg z \in (-\pi, \pi]$ — угол между положительным направлением вещественной оси и вектором z (см. рис. 1.1). В таком случае угол ϕ удовлетворяет полярному представлению (1.1) тогда и только тогда, когда

$$\phi \in \operatorname{Arg} z := \{\arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждый элемент множества $\operatorname{Arg} z$ называется *аргументом* комплексного числа z. Величину $\arg z \in (-\pi, \pi]$ иногда называют главным значением аргумента числа z.

Формулы умножения и деления комплексных чисел приобретают в полярной форме удобный вид. Произведение и частное комплексных чисел $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ равны

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}.$$

Извлечение корня. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$. Решим уравнение

$$z^n = a. \tag{1.2}$$

Представим z и a в полярной форме: $z = re^{i\phi}$, $a = \rho e^{i\arg a}$. Тогда $r^n e^{in\phi} = \rho^{i\arg a}$.

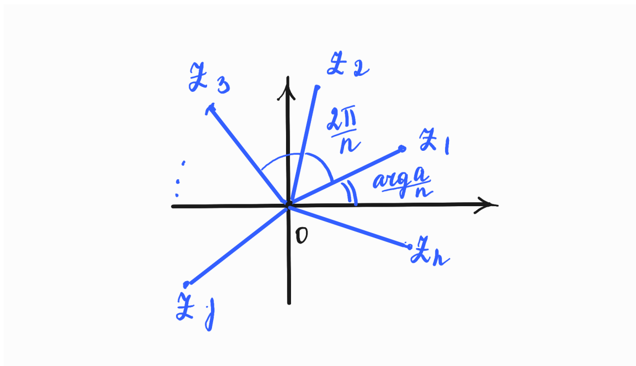


Рис. 1.2:

Рассмотрим два случая. Если $a = 0$, то $\rho = 0$, следовательно, $r = 0$ и $z = 0$ — единственное решение уравнения (1.2).

Если $a \neq 0$, то $r^n = \rho$, $n\phi = \arg a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$z \in \{z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\arg a + 2\pi k}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.3}$$

Так как $z_k = z_{k \pm n} = z_{k \pm 2n} = \ldots$, то в формуле (1.3) достаточно считать $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Числа z_0, …, z_{n-1} попарно различны. На комплексной плоскости они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в нуле радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ (см. 1.2). Итак, при $a \neq 0$, уравнение (1.2) имеет ровно n корней

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\arg a + 2\pi k}{n}}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

1.2 Немного о множествах на комплексной плоскости.

Общие понятия, относящиеся к множествам из $\mathbb{R}^2$ автоматически переносятся на множества комплексной плоскости $\mathbb{C}$, например, множество $E \subset \mathbb{C}$ называется открытым, если оно открыто как множество из $\mathbb{R}^2$. Аналогичным образом определяются замкнутые множества, предельные точки множества, замыкание $\overline{E}$ множества E, граница ∂E множества E и т.д. Напомним, что открытое линейно связное[1] множество $D \subset \mathbb{C}$ назы-

[1]Множество D называется линейно связным, если для любых двух точек c_1, $c_2 \in D$ существует непрерывная кривая $\gamma \in D$ с началом в точке c_1 и концом в точке c_2.

вается областью. Множество E_1 называется *компактно принадлежащим* множеству E_2, если E_1 ограничено и $\overline{E_1} \subset E_2$ (обозначение $E_1 \Subset E_2$).

Пусть $c \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$. Как и в математическом анализе, назовем множества

$$U_\epsilon(c) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < \epsilon\}, \quad U_\epsilon^0(c) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - c| < \epsilon\}$$

ϵ-окрестностью точки c и проколотой ϵ-окрестностью точки c. Первое из множеств является открытым кругом, второе — проколотым открытым кругом. Центры кругов находятся в точке c, радиусы равны ϵ. Из свойств открытых множеств на плоскости следует, что множество $D \subset \mathbb{C}$ открыто $\iff$ для любой точки $z \in D$ существует такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что $U_\delta(c) \subset D$.

Окрестностью точки c назовем любое открытое множество $D \subset \mathbb{C}$, содержащее c. *Проколотой окрестностью* точки c назовем любое открытое множество $D \subset \mathbb{C} \setminus \{c\}$, содержащее $U_\delta^0(c)$ для некоторого $\delta > 0$. Окрестностью множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ назовем любое открытое множество, содержащее $\mathcal{M}$.

1.3 Последовательности и ряды комплексных чисел.

Определение предела последовательности действительных чисел без изменения переносится на случай последовательности комплексных чисел.

Определение 2. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел. Число $c \in \mathbb{C}$ называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$ (обозначение: $c = \lim_{n\to\infty} z_n$), если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство

$$|z_n - c| < \epsilon. \tag{1.4}$$

Непосредственно из определения предела последовательности, получаем, что $\lim_{n\to\infty} z_n = c \iff \lim_{n\to\infty} |z_n - c| = 0$.

Полагая $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n = \operatorname{Im} z_n$, $a = \operatorname{Re} c$, $b = \operatorname{Im} c$, получаем, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу c тогда и только тогда, когда последовательность точек $\{(x_n, y_n)\}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ сходится к точке (a, b). Это дает геометрическое описание понятия предела: $c = \lim_{n\to\infty} z_n \iff$

любая окрестность точки c содержит все члены последовательности $\{z_n\}$ за исключением, быть может, конечного их числа. Из курса математического анализа известно, что последовательность точек $\{(x_n, y_n)\}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ сходится к точке (a, b) тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Мы также приведем доказательство этого факта.

Предложение 1. *Пусть* $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n = \operatorname{Im} z_n, a, b \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b. \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} z_n = c := a + ib$. Так как $0 \le |x_n - a| \le |z_n - c|$, $0 \le |y_n - b| \le |z_n - c|$ и $\lim_{n\to\infty} |z_n - c| = 0$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$.

Обратно. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Из неравенства треугольника следует, что $|z_n - c| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b|$, следовательно, $\lim_{n\to\infty} z_n = c$. $\square$

Из предложения 1 и свойств сходящихся последовательностей действительных чисел вытекают следующие свойства последовательностей комплексных чисел: если $\lim_{n\to\infty} z_n = c$, $\lim_{n\to\infty} w_n = d$, то

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = c + d,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = cd,$$

если $w_n \ne 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $d \ne 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{c}{d}.$$

Определение ограниченной последовательности комплексных чисел такое же, как и для последовательности действительных чисел.

Определение 3. Последовательность $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $R > 0$, что $|z_n| < R$ для любого натурального n.

Применяя предложения 1 и теорему Больцано-Вейерштрасса для последовательностей действительных чисел $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и $\{\operatorname{Im} z_n\}$, получаем аналогичное утверждение для последовательности $\{z_n\}$.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности $\{z_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Используя критерий Коши сходимости последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и двойное неравенство

$$\max(|x_n - x_{n+p}|, |y_n - y_{n+p}|) \leq |z_n - z_{n+p}| \leq |x_n - x_{n+p}| + |y_n - y_{n+p}|,$$

рассуждая, как в предложении 1, получаем

Критерий Коши сходимости последовательности. Последовательность $\{z_n\}$ сходится $\iff$ для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, что для любых $n \geq N$ и $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|z_n - z_{n+p}| < \epsilon$.

Опираясь на свойства последовательностей комплексных чисел, приведем некоторые сведения о рядах комплексных чисел.

Определение 4. Пусть $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{1.6}$$

называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$. Если $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то число S называется суммой ряда (1.6), $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Ряд (1.6) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Точно так же, как в курсе математического анализа доказывается, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Из критерия Коши сходимости последовательности вытекает

Критерий Коши сходимости ряда. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\iff$ для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, что для любых $n \geq N$ и $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \epsilon$.

Критерий Коши влечет

Необходимое условие сходимости ряда. Общий член сходящегося ряда стремится к нулю.

Приведем свойства рядов, которые непосредственно следуют из аналогичных свойств последовательностей:

1. Пусть $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n = \operatorname{Im} z_n$, $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + ib \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b. \tag{1.7}$$

2. Свойство линейности. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = S_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda z_n + \mu w_n) = \lambda S_1 + \mu S_2.$$

1.4 Расширенная комплексная плоскость и стереографическая проекция, как ее геометрическая интерпретация.

Определение 5. Последовательность $\{z_n\}$ называется сходящейся к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \tag{1.8}$$

если $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

Таким образом, $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ если и только если для любого $R > 0$ все члены последовательности $\{z_n\}$, за исключением, быть может, конечного их числа, содержатся вне круга с центром в нуле радиуса R.

Отметим, что из неограниченной последовательности комплексных чисел можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к бесконечности.

Определение 6. *Расширенной комплексной плоскостью* называется комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой: $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Множество $U_\epsilon(\infty) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > \epsilon\}$ будем называть ϵ-окрестностью бесконечности, $U_\epsilon^0(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \epsilon\}$ будем называть проколотой ϵ-окрестностью бесконечности.

Последовательность $\{z_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется сходящейся к $c \in \overline{\mathbb{C}}$ (пишут $\lim_{n\to\infty} z_n = c$), если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq N$ справедливо включение $z_n \in U_\epsilon(c)$. Это определение согласуется с определениями сходящейся последовательности комплексных чисел и сходящейся к бесконечности последовательности комплексных чисел.

Понятие сходимости в $\overline{\mathbb{C}}$ обладает важным свойством: из любой последовательности $\{z_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

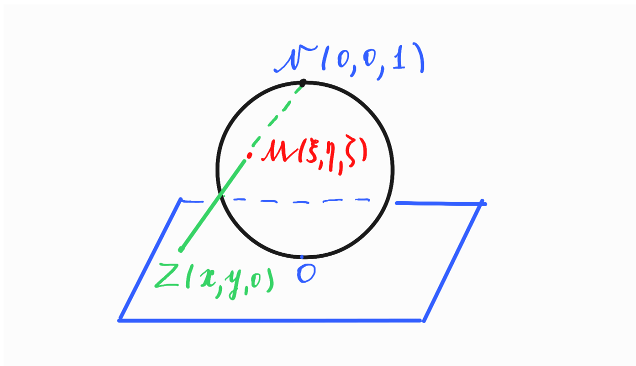


Рис. 1.3:

Стереографическая проекция. Геометрическую интерпретацию расширенной комплексной плоскости можно получить с помощью *стереографической проекции*. Пусть

$$S = \big\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta\big\} \tag{1.9}$$

— сфера с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ радиуса $\frac{1}{2}$. Через $N(0, 0, 1)$ обозначим северный полюс сферы S (см. рис. 1.3). Каждому числу $z = x + iy \in \mathbb{C}$ поставим в соответствие точку $Z(x, y, 0)$ плоскости $\zeta = 0$. Пусть $M(z)$ — точка пересечения $S \setminus N$ и прямой NZ. Для нахождения координат точки $M(z)$ запишем прямую NZ параметрически

$$\xi = tx, \qquad \eta = ty, \qquad \zeta = 1 - t. \tag{1.10}$$

Подставив (1.10) в уравнение (1.9), получаем, что либо $t = 0$, либо $t = \frac{1}{1+|z|^2}$. Значению $t = 0$ отвечает точка N, значению $t = \frac{1}{1+|z|^2}$ отвечает точка $M(z)$ с координатами

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \qquad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \qquad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

Обратное отображение $S \setminus N \to \mathbb{C}$ называется стереографической проекцией. Так как $t = 1 - \zeta$, то стереографическая проекция задается соотношениями

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}.$$

Из приведенных формул следует, что последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ сходится к бесконечности $\iff$ последовательность $\{M(z_n)\}$ точек сферы S сходится к точке N. Поэтому продолжим стереографическую проекцию до отображения $S \to \overline{\mathbb{C}}$, сопоставив полюсу N точку ∞. Построенная модель расширенной комплексной плоскости называется *сферой Римана*.

1.5 Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$. Будем говорить, что на множестве E определена комплекснозначная функция $f(z)$, если каждой точке $z = x + iy \in E$ поставлено в соответствие число $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{C}$, где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. Таким образом, функция $f(z)$ определяется парой действительных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ двух действительных переменных.

Предел функции. По аналогии с пределом действительной функции одного переменного дадим определение предела функции комплексного переменного.

Рассмотрим функцию $f(z)$, заданную на множестве E.

Определение 7. Пусть $c \in \mathbb{C}$ — предельная точка множества E, Число $C \in \mathbb{C}$ называется пределом функции $f(z)$ при $z \to c$ по множеству E, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что для любого $z \in E$, удовлетворяющего условию $0 < |z - c| < \delta$ справедливо неравенство $|f(z) - C| < \epsilon$. При этом пишут $\lim_{z \to c, z \in E} f(z) = C$. Функция $f(z)$ называется сходящейся к бесконечности при $z \to c$ по множеству E, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что для любого $z \in E$, удовлетворяющего условию $0 < |z - c| < \delta$ справедливо неравенство $|f(z)| > \epsilon$. При этом пишут $\lim_{z \to c, z \in E} f(z) = \infty$.

Определение 8. Пусть бесконечность является предельной точкой множества E, $C \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\lim_{z \to \infty, z \in E} f(z) = C$, если $\lim_{\zeta \to 0, \frac{1}{\zeta} \in E} f(\frac{1}{\zeta}) = C$.

В дальнейшем, для краткости, вместо $\lim_{z \to c, z \in E} f(z)$ будем писать $\lim_{z \to c} f(z)$.

Пусть $c, C \in \mathbb{C}$, $a = \operatorname{Re} c$, $b = \operatorname{Im} c$, $A = \operatorname{Re} C$, $B = \operatorname{Im} C$.

Предложение 2. *Пусть $c \in \mathbb{C}$ — предельная точка множества E,* *функция* $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ *определена на множестве* E. *Тогда*

$$\lim_{z\to c} f(z) = C \iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = A, \lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = B.$$

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 1, воспользуемся двойным неравенством

$$\max(|u(x,y)-A|, |v(x,y)-B|) \le |f(z)-C| \le |u(x,y)-A| + |v(x,y)-B|. \tag{1.11}$$

Пусть $\lim_{z\to c} f(z) = C$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что при $z \in E$, $0 < |z-c| < \delta$ справедливо неравенство $|f(z)-C| < \epsilon$. Из (1.11) получаем, что $\max(|u(x,y)-A|, |v(x,y)-B|) < \epsilon$, следовательно, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = A$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = B$.

Пусть $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = A$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = B$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что при $z \in E$, $0 < |z-c| < \delta$ выполняется неравенство $\max(|u(x,y)-A|, |v(x,y)-B|) < \frac{\epsilon}{2}$. Тогда из (1.11) имеем $|f(z)-C| \le |u(x,y)-A| + |v(x,y)-B| < \epsilon$, поэтому $\lim_{z\to c, z\in E} f(z) = C$. □

Из предложения 2 и свойств пределов действительных функций вытекают следующие свойства пределов функций комплексного переменного: если $\lim_{z\to c} f_1(z) = C_1$, $\lim_{z\to c} f_2(z) = C_2$, то $\lim_{z\to c}(f_1(z)+f_2(z)) = C_1+C_2$, $\lim_{z\to c} f_1(z)f_2(z) = C_1C_2$; если функция $f_2(z)$ отлична от нуля и $C_2 \ne 0$, то $\lim_{z\to c} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{C_1}{C_2}$.

Непрерывность функции.

Определение 9. Пусть функция $f(z)$ определена на плотном[2] в себе множестве $E \subset \mathbb{C}$ и $c \in E$. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* c, если $\lim_{z\to c} f(z) = f(c)$. Функция f называется *непрерывной на множестве* E (пишут $f \in C(E)$), если она непрерывна в каждой его точке.

Из свойств пределов получаем, что сумма и произведение двух непрерывных функций являются непрерывными функциями, частное двух непрерывных функций является непрерывной функцией в точках, где знаменатель не равен нулю.

Из предложения 2 следует

[2] Напомним, что множество называется плотным в себе, если каждая его точка является предельной для него.

Предложение 3. *Пусть* $f \in C(E)$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. *Тогда* $f \in C(E) \iff u, v \in C(E)$.

Из предложения 3 и свойств непрерывных действительных функций вытекает непрерывность суперпозиции непрерывных функций: пусть $f \in C(E)$, $f(E) \subset D$ и $g \in C(D)$. Тогда $g \circ f \in C(E)$.

Также из предложения 3 следует, что непрерывная на компакте функция ограничена на нем.

Равномерная непрерывность функции.

Определение 10. Пусть функция $f(z)$ определена на плотном в себе множестве $E \subset \mathbb{C}$. Функция f называется *равномерно непрерывной на множестве* E, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что для любых $z_1, z_2 \in E$, удовлетворяющих условию $|z_1 - z_2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$.

Рассуждая, как в предложении 2, получаем, что функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ равномерно непрерывна на множестве $E \iff$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ равномерно непрерывны на E. Таким образом, если E — компакт, то $f \in C(E) \iff f$ равномерно непрерывна на E.

Глава 2

Дифференцируемость функции комплексного переменного. Конформность отображения в точке. Определение и простейшие свойства голоморфных функций.

Пусть функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ определена в окрестности точки $c = a + ib$.

Обозначим, как обычно, $\Delta x := x - a$, $\Delta y := y - b$, $\Delta z := \Delta x + i\Delta y$, $\Delta u := u(x,y) - u(a,b)$, $\Delta v := v(x,y) - v(a,b)$, $\Delta f := f(z) - f(c) = \Delta u + i\Delta v$. Из курса математического анализа известно, что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $c \iff$ существуют такие числа A_1, A_2, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}$, что в окрестности точки c справедливы представления

$$\begin{aligned} \Delta u =& A_1\Delta x + A_2\Delta y + o_1(|\Delta z|), \\ \Delta v =& B_1\Delta x + B_2\Delta y + o_2(|\Delta z|). \end{aligned} \tag{2.1}$$

(Здесь, как обычно, функции o_j при $j = 1, 2$, удовлетворяют соотношению $\lim_{z\to c} \frac{o_j(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$.) При этом, если функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в точке c, то $A_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $A_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$, $B_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$, $B_2 = \frac{\partial v}{\partial y}$, где все частные производные берутся в точке c.

Определение 11. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой, или $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке c, если существует такое число $C \in \mathbb{C}$, что в окрестности точки c справедливо представление

$$\Delta f = C\Delta z + o(|\Delta z|). \tag{2.2}$$

Здесь $o(|\Delta z|)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая соотношению $\lim_{z\to c} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$. Удобно также использовать свойство $o(|\Delta z|) = o(1)\Delta z$, где $\lim_{z\to c} o(1) = 0$. Деля обе части равенства (2.2) на Δz и устремляя Δz к нулю, получаем, что $f(z)$ является дифференцируемой в точке c тогда и только тогда, когда существует $\lim_{z\to c} \frac{\Delta f}{\Delta z} = C := f'(c)$. Число $f'(c)$ называется *комплексной производной* функции f в точке c. Из (2.2) следует, что функция, дифференцируемая в точке c, непрерывна в этой точке.

2.1 Условия Коши-Римана.

Теорема 1. *Для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке c необходимо и достаточно, чтобы в точке c во-первых, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы и во-вторых, выполнялись условия Коши-Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3}$$

Если $f(z)$ является дифференцируемой в точке c, то

$$f'(c) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2.4}$$

все частные производные берутся в точке c.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(z)$ дифференцируема в точке c. Тогда существует такое $C \in \mathbb{C}$, что справедливо представление (2.2). Подставив $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $C = P + iQ$, $o(|\Delta z|) = o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|)$ в (2.2), получаем

$$\Delta u + i\Delta v = (P + iQ)(\Delta x + i\Delta y) + o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|). \tag{2.5}$$

Приравнивая в этом соотношении действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned} \Delta u &= P\Delta x - Q\Delta y + o_1(|\Delta z|) \\ \Delta v &= Q\Delta x + P\Delta y + o_2(|\Delta z|). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Так как $\max(|o_1(|\Delta z|)|, |o_2(|\Delta z|)|) \le |o(|\Delta z|)|$ и $\lim_{z\to c} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$, то и $\lim_{z\to c} \frac{o_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = \lim_{z\to c} \frac{o_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$. Отсюда для $A_1 = B_2 = P$, $B_1 = -A_2 = Q$ имеет место (2.1), поэтому функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в точке c и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = P, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = Q,$$

где все частные производные берутся в точке c, следовательно, выполнены условия Коши-Римана (2.3).

Достаточность. Пусть в точке c функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы, а их частные производные удовлетворяют условиям Коши-Римана (2.3). Положим $P := \frac{\partial u}{\partial x}(c)$, $Q := \frac{\partial v}{\partial x}(c)$. Тогда в точке c имеют место соотношения (2.6), где $\lim_{z\to c} \frac{o_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = \lim_{z\to c} \frac{o_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta f = \Delta u + i\Delta v &= P\Delta x - Q\Delta y + i(Q\Delta x + P\Delta y) + o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|) = \\ &= (P+iQ)(\Delta x + i\Delta y) + o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|) = \\ &= (P+iQ)\Delta z + o(|\Delta z|). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Так как $|o(|\Delta z|)| = |o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|)| \le |o_1(|\Delta z|)| + |o_2(|\Delta z|)|$, то $\lim_{z\to c} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$. Следовательно, f дифференцируема в точке c и $f'(c) = P + iQ = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Из условий Коши-Римана получаем два оставшихся равенства в (2.4).

□

Примеры. 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда

$$(z^n)' = \lim_{\xi\to z} \frac{\xi^n - z^n}{\xi - z} = \lim_{\xi\to z} (\xi^{n-1} + z\xi^{n-2} + \dots + z^{n-1}) = nz^{n-1}.$$

2. Рассмотрим линейную функцию $f(z) = \overline{z} = x - iy$. Очевидно, что эта функция $\mathbb{R}$-дифференцируема. Однако $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, поэтому условия Коши-Римана не выполнены ни в одной точке $z \in \mathbb{C}$, следовательно, функция $\overline{z}$ не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой ни в одной точке.

3. Положим

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{при} \quad z \ne 0, \\ 0 & \text{при} \quad z = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Покажем, что в нуле функция f не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой, но удовлетворяет условиям Коши-Римана. Действительно, устремим z к нулю по лучу, образующему угол $\theta \in (-\pi, \pi]$ с осью x. На этом луче $z = re^{i\theta}$, $f(z) = re^{5i\theta}$, следовательно, величина

$$\lim_{r \to 0+0} \frac{f(re^{i\theta}) - f(0)}{re^{i\theta}} = \lim_{r \to 0+0} \frac{re^{5i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{4i\theta}$$

является непостоянной функцией угла θ, поэтому функция f не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в нуле.

При $x, y \in \mathbb{R}$ имеем $f(x) = x$, $f(iy) = iy$, поэтому $u(x, 0) = x$, $v(x, 0) = 0$, $u(0, y) = 0$, $v(0, y) = y$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0,$$

следовательно, в нуле функция f удовлетворяет условиям Коши-Римана.

2.2 Геометрический смысл аргумента и модуля комплексной производной.

Пусть по-прежнему функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в окрестности U точки $c = a + ib$. Наряду с функцией f мы будем рассматривать отображение $w = f(z)$: $x + iy \to u + iv$, задаваемое равенствами

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке c. Тогда функция $f(z)$ дифференцируема в этой точке $\iff$ существуют такие P, $Q \in \mathbb{C}$, что в точке c матрица Якоби отображения $w = f(z)$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

При этом, если выполняется равенство (2.9), то $f'(c) = P + iQ$.

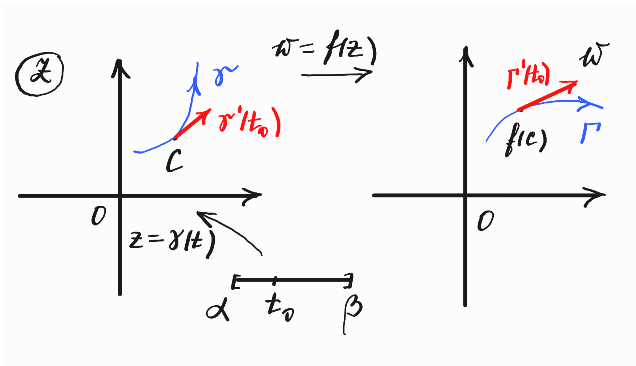


Рис. 2.1:

Предположим теперь, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точках множества U. Рассмотрим непрерывную кривую γ, лежащую в U и проходящую через точку c, задаваемую уравнением $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$: $[\alpha,\beta] \to U$, $\gamma(t_0) = c$. Допустим, что функции $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0. Тогда

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

— касательный вектор к кривой γ в точке c (см. рис.2.1).

Рассмотрим кривую Γ, являющуюся образом кривой γ при отображении f. Тогда $\Gamma(t) = u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))$, $\Gamma(t_0) = f(c)$. Из свойств суперпозиции получаем, что функции $u(x(t),y(t))$ и $v(x(t),y(t))$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$ и дифференцируемы в точке t_0. Поэтому кривая Γ непрерывна и имеет касательный вектор в точке $f(c)$.

Найдем связь между касательными векторами $\Gamma'(t_0)$ и $\gamma'(t_0)$ в случае, если функция $f(z)$ дифференцируема в точке c.

Предложение 4. *Пусть функция f дифференцируема в точке c, а кривые γ, Γ — те же, что и выше. Тогда касательные векторы к кривым Γ и γ в точках $f(c)$ и c соответственно связаны равенством*

$$\Gamma'(t_0) = f'(c)\gamma'(t_0). \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу дифференцируемости функции f в точке c, в точках множества U справедливо представление

$$f(z) - f(c) = (f'(c) + o(1))(z - c), \tag{2.11}$$

где $\lim_{z\to c} o(1) = 0$. Подставим $z = \gamma(t)$ в (2.11) и поделим обе части равенства (2.11) на $t - t_0$. Так как $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, $\Gamma(t_0) = f(c)$, $\gamma(t_0) = c$, получаем

$$\frac{\Gamma(t) - \Gamma(t_0)}{t - t_0} = (f'(c) + o(1))\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \to f'(c)\gamma'(t_0)$$

при $t \to t_0$, что и требовалось доказать. □

Выясним геометрический смысл равенства (2.10) при $f'(c) \neq 0$. Дополнительно потребуем, чтобы касательный вектор $\gamma'(t_0)$ к кривой γ в точке c был отличен от нуля. Запишем $f'(c)$ и $\gamma'(t_0)$ в полярной форме:

$$f'(c) = |f'(c)|e^{i\arg f'(c)}, \quad \gamma'(t_0) = |\gamma'(t_0)|e^{i\theta}.$$

Из (2.10) следует, что $\Gamma'(t_0) = |\Gamma'(t_0)|e^{i\Theta}$, где

$$|\Gamma'(t_0)| = |f'(c)| \cdot |\gamma'(t_0)|, \quad \Theta = \arg f'(c) + \theta. \tag{2.12}$$

Геометрический смысл аргумента производной. Величина $\Theta - \theta$ называется *углом поворота кривой γ в точке c при отображении $w = f(z)$*. Из (2.12) следует, что угол поворота не зависит от кривой, имеющей ненулевой касательный вектор в точке c и равен $\arg f'(c)$. Таким образом, все такие кривые, проходящие через точку c, поворачиваются при этом отображении на один и тот же угол равный $\arg f'(c)$.

Геометрический смысл модуля производной. Величина $\frac{|\Gamma'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)|}$ называется *линейным растяжением кривой γ в точке c при отображении $w = f(z)$*. Из (2.12) следует, что линейное растяжение не зависит от кривой, имеющей ненулевой касательный вектор в точке c, и равно $|f'(c)|$.

2.3 Определение конформного отображения в точке. Необходимое и достаточное условие конформности гладкого отображения в точке.

Наложим на отображение

$$w = f(z) : (x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$$

следующие ограничения: во-первых, как и выше, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в окрестности U точки $c = a + ib$ и дифференцируемы в точке c, во-вторых, матрица Якоби $\left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{smallmatrix}\right)\Big|_c$ отображения $w = f(z)$ в точке c невырождена.

Как и выше, рассмотрим непрерывную кривую γ, задаваемую уравнением $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$: $[\alpha, \beta] \to U$, $\gamma(t_0) = c$, и ее образ Γ при отображении $w = f(z)$. Предположим, что в точке c кривая γ имеет ненулевой касательный вектор $\gamma'(t_0) = (p_1, p_2)$. По теореме о дифференцируемости суперпозиции, кривая Γ имеет в точке $f(c)$ касательный вектор $\Gamma'(t_0) = (P_1, P_2)$ равный

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Так как $\gamma'(t_0) \neq 0$ и матрица $\left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{smallmatrix}\right)$ невырождена, то и $\Gamma'(t_0) \neq 0$.

Рассмотрим теперь две непрерывные кривые γ_1 и γ_2, проходящие через точку $c = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ и имеющие в этой точке ненулевые касательные векторы $\gamma_1'(t_1)$ и $\gamma_2'(t_2)$.

Определение 12. Углом от кривой γ_1 до кривой γ_2 в точке c называется угол[1] от $\gamma_1'(t_1)$ до $\gamma_2'(t_2)$.

Определение 13. Отображение $w = f(z)$, удовлетворяющее приведенным выше ограничениям, называется *конформным в точке c*, если для любых двух кривых, проходящих через точку c и имеющих в этой точке ненулевые касательные векторы, угол в точке c от первой кривой до второй кривой равен углу в точке $f(c)$ от образа первой кривой до образа второй кривой при отображении $w = f(z)$. Короче говоря, отображение $w = f(z)$ называется конформным, если оно сохраняет углы между кривыми.

Теорема 2. *Отображение $w = f(z)$, удовлетворяющее приведенным выше ограничениям, является конформным в точке c $\iff$ функция f дифференцируема в точке c и $f'(c) \neq 0$.*

Доказательству теоремы предпошлем следующее техническое утверждение.

[1]Углом от вектора p до вектора q назовем угол, на который нужно повернуть p, чтобы получить вектор, сонаправленный с q.

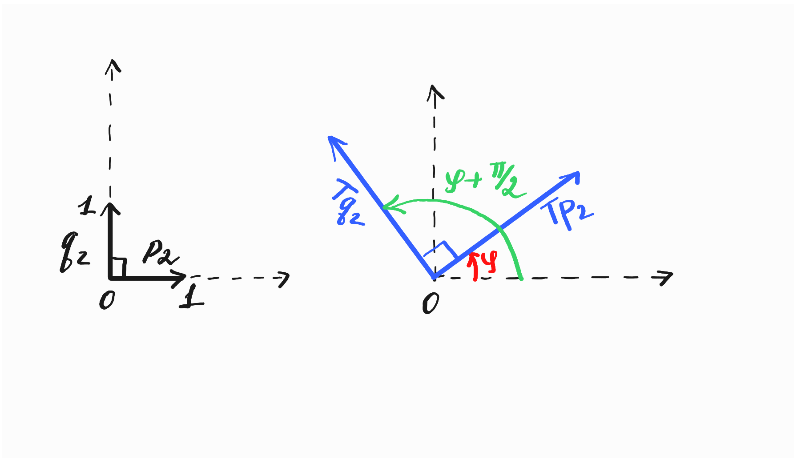


Рис. 2.2:

Предложение 5. *Пусть T — такая невырожденная вещественная 2×2 матрица, что для любых векторов $p, q \in \mathbb{R}^2$ угол от Tp до Tq равен углу от p до q. Тогда существуют такие $R > 0$ и $\phi \in (-\pi, \pi]$, что $T = \left(\begin{smallmatrix} R\cos\phi & -R\sin\phi \\ R\sin\phi & R\cos\phi \end{smallmatrix}\right)$.*

Доказательство. Положим $T = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{smallmatrix}\right)$. Рассмотрим пару ортогональных векторов $p_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $q_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. По условию, векторы $Tp_1 = \left(\begin{smallmatrix} A_1+A_2 \\ B_1+B_2 \end{smallmatrix}\right)$ и $Tq_1 = \left(\begin{smallmatrix} A_1-A_2 \\ B_1-B_2 \end{smallmatrix}\right)$ также ортогональны, поэтому их скалярное произведение равно нулю. Следовательно, $A_1^2 - A_2^2 + B_1^2 - B_2^2 = 0$. Положим

$$R = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}. \tag{2.14}$$

Так как матрица T невырождена, то $R \neq 0$.

Рассмотрим теперь пару векторов $p_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $q_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $Tp_2 = \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ B_1 \end{smallmatrix}\right)$, $Tq_2 = \left(\begin{smallmatrix} A_2 \\ B_2 \end{smallmatrix}\right)$. Из (2.14) следует, что длины векторов Tp_2 и Tq_2 равны R. Пусть ϕ — угол от положительного направления оси x до вектора Tp_2. Так как угол от p_2 до q_2 равен $\frac{\pi}{2}$, то и угол от Tp_2 до Tq_2 тоже равен $\frac{\pi}{2}$, значит угол от положительного направления оси x до вектора Tq_2 равен $\phi + \frac{\pi}{2}$ (см. рис 2.2). Используя полярные координаты, получаем, что $Tp_2 = \left(\begin{smallmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \end{smallmatrix}\right)$, $Tq_2 = \left(\begin{smallmatrix} -R\sin\phi \\ R\cos\phi \end{smallmatrix}\right)$. Поэтому $T = \left(\begin{smallmatrix} R\cos\phi & -R\sin\phi \\ R\sin\phi & R\cos\phi \end{smallmatrix}\right)$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть отображение f конформно в точке c. Отметим, что для любого вектора $p = p_1 + ip_2$ кривая, задаваемая уравнением $\gamma(t) = pt + c$, проходит через точку c при $t = 0$ и ее касательный вектор в точке c равен $\gamma'(0) = p$. Обозначим через T матрицу Якоби отображения $w = f(z)$ в точке c. Из определения конформного отображения следует, что матрица T удовлетворяет условиям предыдущего предложения, следовательно, $T = \left(\begin{smallmatrix} R\cos\phi & -R\sin\phi \\ R\sin\phi & R\cos\phi \end{smallmatrix}\right)$ для некоторых $R > 0$ и $\phi \in (-\pi, \pi]$. Из следствия 1 получаем, что функция f дифференцируема в точке c и $f'(c) = R(cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$.

Достаточность следует из геометрического смысла аргумента дифференцируемой функции. $\square$

2.4 Свойства дифференцируемых функций.

Следующие правила дифференцирования доказываются так же, как и в курсе математического анализа, поэтому мы приведем их без доказательства.

1. Арифметические действия. Если функции f и g дифференцируемы в точке z, то их сумма, произведение и частное (при $g(z) \neq 0$) тоже дифференцируемы в точке z, причем

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z), \quad (f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \tag{2.15}$$

2. Дифференцирование суперпозиции. Если функция f дифференцируема в точке z, а функция g дифференцируема в точке $f(z)$, то суперпозиция $g \circ f$ дифференцируема в точке z и

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z). \tag{2.16}$$

3. Дифференцирование обратной функции.

Теорема 3. *Пусть отображение $w = f(z)$ гомеоморфно (то есть взаимно однозначно и взаимно непрерывно) переводит окрестность U точки c в окрестность V точки $f(c)$. Через $z = g(w)$: $V \to U$ обозначим обратное отображение к $w = f(z)$. Тогда если f дифференцируема в точке c и $f'(c) \neq 0$, то функция g дифференцируема в точке $f(c)$ и $g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$.*

Доказательство. Для $w \in V$ положим $z = g(w)$. Тогда $w = f(z)$ и $\frac{g(w)-g(f(c))}{w-f(c)} = \frac{z-c}{f(z)-f(c)}$. Так как отображение $w = f(z)$ гомеоморфно, то $w \to f(c) \iff z \to c$. Отсюда

$$g'(f(c)) = \lim_{w \to f(c)} \frac{g(w) - g(f(c))}{w - f(c)} = \lim_{z \to c} \frac{z - c}{f(z) - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

□

Определение 14. Функция f называется *голоморфной в точке* $c \in \mathbb{C}$ (пишут $f \in \mathcal{O}(c)$), если f дифференцируема в некоторой окрестности U точки c и $f'(z) \in C(U)$. Функция f называется *голоморфной на множестве* $D \subset \mathbb{C}$ (пишут $f \in \mathcal{O}(D)$), если f голоморфна в каждой точке множества D.

Замечание 1. На самом деле непрерывность производной $f'(z)$ следует из существования производной в окрестности каждой точки множества. Доказательство этого факта мы опускаем по техническим причинам.

Из сказанного выше следует:

Во-первых, если $f, g \in \mathcal{O}(D)$, то $f + g, fg \in \mathcal{O}(D)$, а если $g \neq 0$ в точках множества D, то и $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}(D)$ и справедливы формулы (2.15).

Во-вторых, если D, G — открытые множества в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(D) \subset G$ и $g \in \mathcal{O}(G)$, то суперпозиция $g \circ f \in \mathcal{O}(D)$ и справедлива формула (2.16).

В третьих, справедливо утверждение о голоморфности обратной функции

Предложение 6. *Пусть $D, G \in \mathbb{C}$ — открытые множества и отображение $w = f(z)$ является гомеоморфизмом D на G. Через $z = g(w)$: $G \to D$ обозначим обратное отображение к $w = f(z)$. Тогда если $f \in \mathcal{O}(D)$ и $f' \neq 0$ в точках из D, то $g \in \mathcal{O}(G)$ и $g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$ для любого $w \in G$.*

Замечание 2. На самом деле требование $f'(z) \neq 0$ вытекает из остальных условий. Доказательство этого факта мы приведем позже.

Примеры.

4. Из формул (2.15) следует, что $(z^n)' = nz^{n-1}$ для всех целых n, многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ дифференцируем во всех

точках $z \in \mathbb{C}$, а рациональная функция $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где P, Q — многочлены, дифференцируема во всех точках $z \in \mathbb{C}$, где $Q(z) \neq 0$. При этом формулы для производных $P'(z)$ и $R'(z)$ такие же, как и в случае действительной переменной. Тем самым многочлен является голоморфной функцией всюду в $\mathbb{C}$, а рациональная функция голоморфна вне множества нулей знаменателя.

5. *Экспоненциальная функция.* Для каждого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ определим экспоненту комплексного числа z формулой $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Так заданная функция в случае действительных и чисто мнимых значений $z = x$ и $z = iy$ совпадает с введенными ранее e^x и e^{iy} соответственно. Поскольку функции $u(x, y) = e^x \cos y$ и $v(x, y) = e^x \sin y$ дифференцируемы для любых значений $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y,$$

то по теореме 1 функция e^z дифференцируема в любой точке $z \in \mathbb{C}$. При этом

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Таким образом, функция e^z голоморфна всюду $\mathbb{C}$. Непосредственно из определения следует, что экспоненциальная функция является периодической с периодом $2\pi i$ и $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

6. *Гиперболические и тригонометрические функции.* Положим

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Для действительных значений $z = x$ так введенные функции совпадают с ранее введенными $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$ и $\sin x$ соответственно. Из формул (2.15), (2.16) получаем, что все четыре функции дифференцируемы для всех $z \in \mathbb{C}$, а их производные вычисляются по тем же формулам, что и для действительной переменной

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{sh} z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

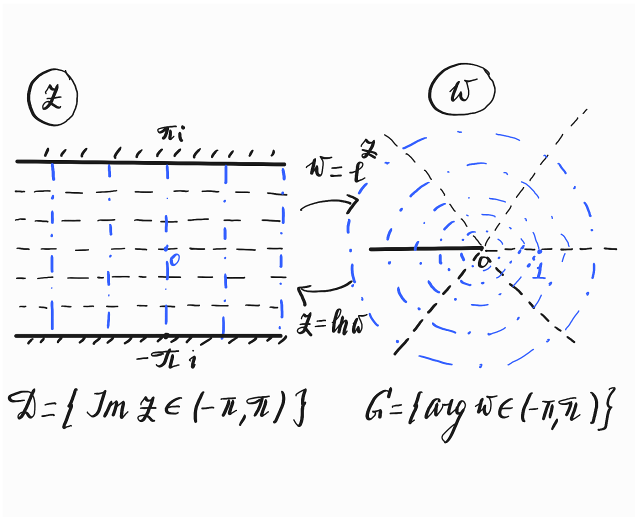


Рис. 2.3:

Таким образом, функции $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\cos z$, $\sin z$ голоморфны всюду в $\mathbb{C}$.

Логарифмическая функция. Для каждого $w \in \mathbb{C}$ решим относительно $z = x + iy$ уравнение

$$e^z = w. \tag{2.17}$$

Так как $|e^z| = e^x$, то при $w = 0$ уравнение (2.17) не имеет решений.

Пусть $w \neq 0$. Представим $w = |w|e^{i \arg w}$, где $\arg w \in (-\pi, \pi]$. Тогда равенство (2.17) равносильно системе

$$\begin{cases} e^x = |w|, \\ y = \arg w + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.18}$$

следовательно, $e^z = w \iff z \in \operatorname{Ln} w := \{\ln |w| + i \arg w + 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Рассмотрим область $D = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$. Из приведенных выше рассуждений получаем, что отображение $w = e^z$ взаимно однозначно переводит D на область $G = \{w \in \mathbb{C} : \arg w \in (-\pi, \pi)\}$ (см. рис. 2.3). Обратное отображение $z = g(w)$ задается функцией $g(w) = \ln w := \ln |w| + i \arg w$. Так как обе функции e^z и $\ln w$ непрерывны в областях D и G соответственно, то отображение $w = e^z$ является гомеоморфизмом D на G. Также $(e^z)' = e^z \neq 0$, значит по теореме 3 функция

$\ln w$ является дифференцируемой в области G и

$$(\ln w)' = \frac{1}{w}. \tag{2.19}$$

Функция $\ln z$ является голоморфной в области D. Ее иногда называют главным значением логарифма. При вещественных положительных $z = x$ она совпадает с ранее введенной действительной функцией $\ln x$.

Глава 3

Интеграл от функции комплексного переменного. Интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши. Теорема о среднем для голоморфных функций.

3.1 Некоторые сведения из курса математического анализа, относящиеся к кривым и криволинейным интегралам второго рода.

Напомним нужные нам в дальнейшем понятия из курса математического анализа.

Кривая $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется *гладкой*, если ее можно задать уравнением

$$\gamma(t) = \phi(t) + i\psi(t), \quad t \in [a, b], \tag{3.1}$$

где $\phi, \psi \in C^1[a, b]$ и касательный вектор $\gamma'(t) = \phi'(t) + i\psi'(t) \neq 0$ при $t \in [a, b]$.

Кривая $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется *кусочно гладкой*, если ее можно задать уравнением (3.1), где функции $\phi, \psi \in C[a,b]$ и существует такое разбиение $\tau : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$, что функции $\phi_j(t) = \phi(t)$ и $\psi_j(t) = \psi(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$ удовлетворяют условиям $\phi_j, \psi_j \in C^1[t_{j-1}, t_j]$ для всех $1 \le j \le n$, $\gamma'(t) = \phi'(t) + i\psi'(t) \ne 0$ при $t \in [a,b] \setminus \{\cup_{j=0}^n t_j\}$, а в точках разбиения $\gamma'(t_{j-1}+0) = \phi'(t_{j-1}+0) + i\psi'(t_{j-1}+0) \ne 0$, $\gamma'(t_j - 0) = \phi'(t_j - 0) + i\psi'(t_j - 0) \ne 0$ при $1 \le j \le n$.

В каждом из случаев, параметризацию (3.1), удовлетворяющую перечисленным выше условиям, будем называть *допустимой* для γ.

Замкнутой жордановой кривой называется непрерывная замкнутая кривая без самопересечений. Из теоремы Жордана следует, что для любой замкнутой жордановой кривой γ существует такая ограниченная область $G \subset \mathbb{C}$, что $\partial G = \gamma$. Кусочно гладкую замкнутую жорданову кривую будем называть *простой замкнутой кривой*.

Мы не будем повторять определение криволинейных интегралов, оно уже дано в курсе математического анализа. Напомним только, что если кривая γ является кусочно гладкой с допустимой параметризацией (3.1) и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вдоль γ, то

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left(P(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) + Q(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)\right) dt. \tag{3.2}$$

$$\int_\gamma P(x,y)ds = \int_a^b P(\phi(t),\psi(t))|\gamma'(t)|dt. \tag{3.3}$$

3.2 Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.

Определение 15. Пусть γ является кусочно гладкой кривой и функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непрерывна вдоль γ. *Интегралом от функции $f(z)$ по кривой γ* называется величина

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy. \tag{3.4}$$

Из свойств криволинейных интегралов сразу вытекают следующие три свойства интегралов от функции комплексного переменного (мы предполагаем, что все кривые являются кусочно гладкими, а функции непрерывными вдоль этих кривых):

1. Линейность. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz.$$

2. При изменении ориентации кривой интеграл меняет знак

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

3. Аддитивность. Пусть конец кривой γ_1 совпадает с началом кривой γ_2, $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2$. Тогда

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Свойство аддитивности позволяет определить интеграл от функции комплексного переменного вдоль объединения конечного числа кривых. Пусть $\Gamma = \cup_{j=1}^n \gamma_j$. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Очень часто в курсе будет встречаться случай, когда $\Gamma = \partial G$ для некоторой ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$. Будем называть G *областью с простой границей*, если G ограничена и ∂G состоит из конечного числа простых замкнутых попарно не пересекающихся кривых. По соглашению будем считать, что ориентация каждой из этих кривых выбрана так, чтобы при обходе по ∂G область G оставалась слева. В частности, если γ — простая замкнутая кривая, G — ограниченная область, границей которой является γ, то ориентация кривой γ выбирается так, чтобы при обходе по ней область G оставалась слева.

Приведем удобную формулу для вычисления комплексных интегралов. Ниже будем считать, что если $h_1, h_2 \in C[a,b]$ и $h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$, то

$$\int_a^b h(t)dt := \int_a^b h_1(t)dt + i\int_a^b h_2(t)dt.$$

Предложение 7. *Пусть γ является кусочно гладкой кривой с допустимой параметризацией* (3.1) *и функция f непрерывна вдоль γ. Тогда*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{3.5}$$

Доказательство. Преобразуем правую часть (3.5). Имеем

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) =&(u(\phi(t),\psi(t)) + iv(\phi(t),\psi(t))(\phi'(t) + i\psi'(t)) = \\ =&(u(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) - v(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)) + \\ &+ i(v(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) + u(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Так как

$$\int_a^b (u(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) - v(\phi(t),\psi(t))\psi'(t))dt = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy,$$

$$\int_a^b (v(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) + u(\phi(t),\psi(t))\psi'(t))dt = \int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy,$$

то формула (3.5) следует из формул (3.4),(3.6). □

Для комплексных интегралов, как и в действительном случае, справедлива формула Ньютона-Лейбница.

Предложение 8. *Пусть γ — кусочно гладкая кривая в области $D \subset \mathbb{C}$ с началом в точке z_1 и концом в точке z_2. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{O}(D)$ справедлива формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_\gamma f'(z)dz = f(z_2) - f(z_1). \tag{3.7}$$

В частности, если кривая γ замкнута, то $\int_\gamma f'(z)dz = 0$.

Доказательство. Пусть (3.1) — допустимая параметризация кривой γ. Из формулы (2.10) следует, что $(f(\gamma(t))' = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Поэтому

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f(\gamma(t))'dt =$$

$$= \int_a^b (u(\phi(t),\psi(t)))'dt + i\int_a^b (v(\phi(t),\psi(t)))'dt =$$

$$= (u(\phi(t),\psi(t)) + iv(\phi(t),\psi(t)))\,|_a^b = f(z_2) - f(z_1).$$

□

Очень важный пример. Пусть $n \in \mathbb{Z}$, γ — окружность радиуса R с центром в точке a. Тогда

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{при} \quad n = -1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Так как γ является границей круга, то она обходится против часовой стрелки, следовательно $\gamma(t) = a + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Если $n \neq -1$, то $(z-a)^n = (\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1})'$ и, так как γ — замкнутая кривая и функция $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ голоморфна в окрестности кривой γ, то $\int_\gamma (z-a)^n dz = 0$.

Пусть $n = -1$. Тогда $\gamma'(t) = Rie^{it}$ и по формуле (3.5) получаем

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Предложение 9 (Оценка интеграла)**.** *Пусть функция f непрерывна вдоль кусочно гладкой кривой γ. Тогда*

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)| ds. \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть (3.1) — допустимая параметризация для γ. Положим $I := \int_\gamma f(z)dz$. Если I=0, то оценка (3.9) очевидна.

Иначе представим I в полярной форме $I = |I|e^{i\theta}$. По свойству линейности имеем

$$|I| = e^{-i\theta} \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma e^{-i\theta} f(z) dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Так как $|I| \in \mathbb{R}$, то

$$|I| = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)) dt.$$

В правой части последнего выражения стоит интеграл от вещественной функции $g(t) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))$. Пользуясь оценкой $\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b |g(t)| dt$, получаем

$$|I| \leq \int_a^b |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))| dt \leq \int_a^b |(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))| dt =$$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t))| dt = \int_\gamma |f(z)| ds$$

(в последнем равенстве мы воспользовались формулой (3.3)). □

Следствие 2. *Пусть функция f и кривая γ удовлетворяют условиям предыдущего предложения и $\max_{z\in\gamma} |f(z)| \le M$. Тогда*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \le M|\gamma|, \tag{3.10}$$

где $|\gamma|$ — длина кривой γ.

3.2.1 Интеграл от функции комплексного переменного вдоль непрерывно дифференцируемой кривой.

Обобщим понятие интеграла от комплексной функции на более общий класс кривых.

Назовем кривую γ *непрерывно дифференцируемой*, если ее можно задать уравнением (3.1), где функции $\phi, \psi \in C^1[a, b]$.

Назовем кривую γ *кусочно непрерывно дифференцируемой*, если ее можно задать уравнением (3.1), где функции ϕ, ψ являются кусочно непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a, b]$. Последнее значит, что $\phi, \psi \in C[a, b]$ и существует такое разбиение $\tau : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$, что функции $\phi_j(t) = \phi(t)$ и $\psi_j(t) = \psi(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$ удовлетворяют условиям $\phi_j, \psi_j \in C^1[t_{j-1}, t_j]$ для всех $1 \le j \le n$.

В каждом из случаев, параметризацию (3.1), удовлетворяющую перечисленным выше условиям, будем называть *допустимой* для γ.

Понятия непрерывно дифференцируемой и кусочно непрерывно дифференцируемой кривой являются более общими, чем понятия гладкой и кусочно гладкой кривой. Например, постоянная кривая $\gamma(t) = 0, t \in [a, b]$, является непрерывно дифференцируемой, но не является гладкой.

Пусть функция f непрерывна вдоль кусочно непрерывно дифференцируемой кривой γ с допустимой параметризацией (3.1). Тогда зададим $\int_\gamma f(z)dz$ формулой (3.5). Так определенный интеграл совпадает с уже заданным формулой (3.4) в случае, если кривая γ кусочно гладкая и удовлетворяет перечисленным выше свойствам интеграла вдоль кусочно-гладкой кривой.

3.3 Интегральная теорема Коши.

Следующая теорема играет фундаментальную роль в теории функций комплексного переменного.

Теорема 4. *Пусть D — область с простой границей и $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$. Тогда*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. По определению $\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\partial D} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\partial D} v(x,y)dx + u(x,y)dy$. Так как $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны вместе с частными производными и удовлетворяют условиям Коши-Римана (2.3) в некоторой окрестности множества $\overline{D}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Применяя формулу Грина к вещественным интегралам

$$\int_{\partial D} u(x,y)dx - v(x,y)dy, \quad \int_{\partial D} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

и учитывая условия Коши-Римана, получаем

$$\int_{\partial D} u(x,y)dx - v(x,y)dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

$$\int_{\partial D} v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

следовательно, $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$. □

Замечание 3. Интегральная теорема Коши остается справедливой, если заменить условие $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ на более общее $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$.

3.3.1 Гомотопическая версия теоремы Коши. Понятие односвязной области. Теорема Коши для односвязной области.

Материал, приведенный в данном пункте, носит ознакомительный характер. Поэтому все утверждения будут приведены без доказательства.

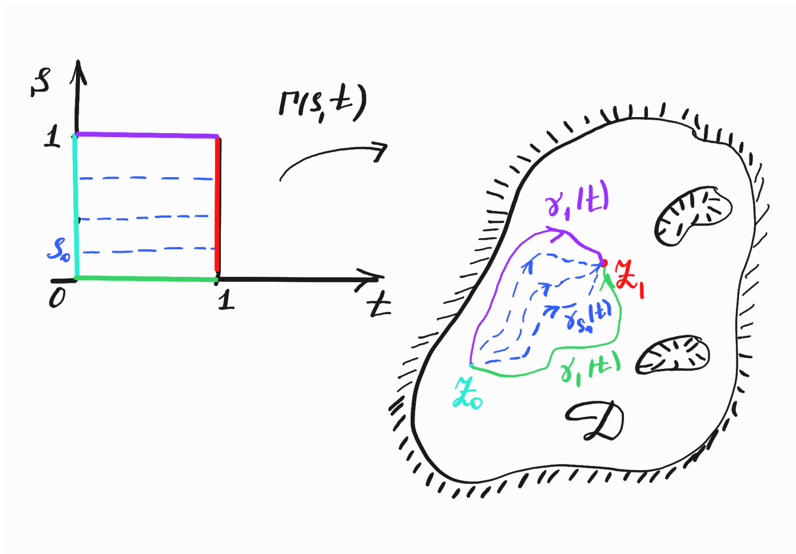


Рис. 3.1:

Определение 16. Пусть две непрерывные кривые $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$, $t \in [0,1]$ лежат в области D и имеют общее начало $z_0 := \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ и общий конец $z_1 := \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Кривые γ_0 и γ_1 называются *гомотопными* в области D (обозначение $\gamma_0 \sim \gamma_1$ в D), если существует непрерывное отображение $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to D$, удовлетворяющее условиям:

1) $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$ для всех $t \in [0,1]$, 2) $\Gamma(0,s) = z_0$, $\Gamma(1,s) = z_1$ для всех $s \in [0,1]$.

Иными словами, семейство кривых $\gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$, $s \in [0,1]$ с общим началом z_0 и общим концом z_1 осуществляет "непрерывную деформацию" кривой γ_0 в кривую γ_1, оставаясь при этом в пределах области D (см. рис. 3.1).

Теорема 5 (Гомотопический вариант теоремы Коши)**.** *Пусть функция f голоморфна в области D. Тогда для любых непрерывно дифференцируемых гомотопных в области D кривых γ_0 и γ_1 выполняется равенство*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

В теории функций комплексного переменного важную роль играет класс областей, называемых односвязными.

Определение 17. Область D называется *односвязной*, если любые две непрерывные кривые $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ с общим началом и общим концом гомотопны в области D.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 10. *Область $D \subset \mathbb{C}$ является односвязной $\iff$ любая замкнутая жорданова кривая $\gamma \subset D$ является границей ограниченной области, целиком содержащейся в D.*

Для ограниченных областей с простой границей есть более удобный критерий.

Предложение 11. *Ограниченная область $D \subset \mathbb{C}$ с простой границей является односвязной $\iff$ ∂D является простой замкнутой кривой.*

Из гомотопического варианта теоремы Коши следует

Предложение 12. *Пусть область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна и $f \in \mathcal{O}(D)$. Тогда для любой простой замкнутой кривой $\gamma \subset D$ справедливо равенство*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Замечание 4. В предыдущем утверждении требование односвязности существенно. Например, если $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, то $f \in \mathcal{O}(D)$, однако (см. (3.8)) $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i$.

3.4 Интегральная формула Коши. Теорема о среднем для голоморфной функции.

Теорема 6. *Пусть D является областью с простой границей, $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$, $z \in D$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{3.12}$$

Доказательство. Так как D — открытое множество, то для достаточно малых δ точка z содержится в D вместе с некоторой δ-окрестностью $U_\delta(z)$. Пусть $\gamma_\delta = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| = \delta\}$ (напомним, что кривая γ_δ ориентирована против часовой стрелки). Рассмотрим область $D_\delta := \{\xi \in$

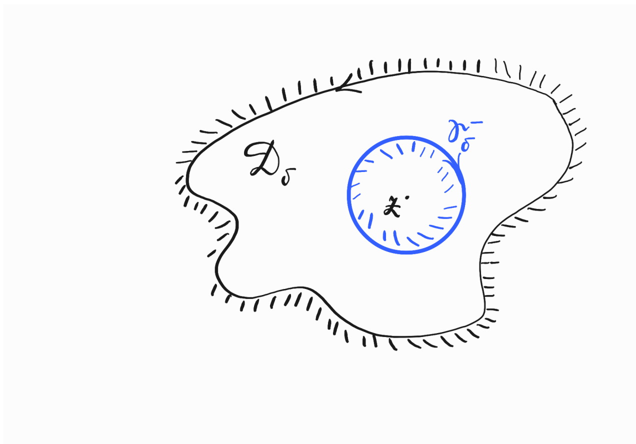


Рис. 3.2:

$D : |\xi - z| > \delta\}$ (см. рис. 3.2). Поскольку функция $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ голоморфна в замыкании области (D_δ), по интегральной теореме Коши получаем $\int_{\partial D_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$.

Так как $\partial D_\delta = \partial D \cup \gamma_\delta^-$, где кривая γ_δ^- уже ориентирована по часовой стрелке, то

$$0 = \int_{\partial D_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\gamma_\delta^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Поскольку $\int_{\gamma_\delta^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = -\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$, получаем, что для достаточно малых δ справедливо равенство

$$\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что $\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ не зависит от δ. Поэтому, чтобы доказать равенство (3.12), достаточно показать, что $\lim_{\delta \to 0+0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z)$.

Из формулы (3.8) следует, что $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi$. Следовательно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

Так как $|\gamma_\delta| = 2\pi\delta$ и $|\xi - z| = \delta$ при $\xi \in \gamma_\delta$, то по следствию 2 получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\xi\in\gamma_\delta}\left|\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\right|\cdot|\gamma_\delta| = \\ = \max_{\xi\in\gamma_\delta}|f(\xi)-f(z)| \to 0 \tag{3.14}$$

при $\delta \to 0+0$, поскольку функция f непрерывна в точке z. □

Замечание 5. Интегральная формула Коши остается справедливой, если заменить условие $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ на более общее $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$.

Следствие 3 (Теорема о среднем для голоморфных функций)**.** *Пусть функция f голоморфна в круге $|z - z_0| < R$. Тогда для любого $r \in (0, R)$ значение функции f в центре круга $|z - z_0| < r$ равно среднему значению по границе этого круга, то есть*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt. \tag{3.15}$$

Доказательство. Положим $U_r(z_0) = \{|z - z_0| < r\}$. Так как $f \in \mathcal{O}(\overline{U_r(z_0)})$, то по интегральной формуле Коши (3.12) имеем $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_r(z_0)}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi$. Параметризуя границу круга $\partial U_r(z_0)$: $\xi = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $d\xi = rie^{it}$, получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}ire^{it} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$

□

Глава 4

Интеграл типа Коши, бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Теорема Лиувилля и доказательство основной теоремы алгебры. Первообразная голоморфной функции, теорема Мореры. Элементарные сведения о гармонических функциях.

4.1 Интеграл типа Коши, бесконечная дифференцируемость голоморфных функций.

Пусть функция f непрерывна на кусочно гладкой кривой γ, $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

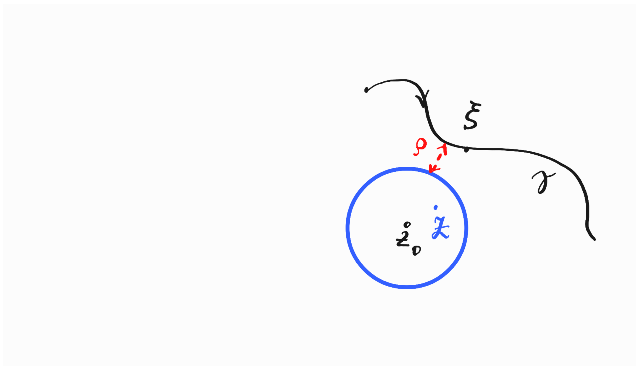


Рис. 4.1:

Определение 18. *Интегралом типа Коши* называется выражение

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi. \tag{4.1}$$

Предложение 13. *Пусть γ — кусочно гладкая кривая и $f \in C(\gamma)$. Тогда функция F, определенная в (4.1) голоморфна и бесконечно дифференцируема на множестве $\mathbb{C}\setminus\gamma$. При этом*

$$F^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma$ и индукцией по n покажем справедливость формулы (4.2) в точке z_0. Так как множество $\mathbb{C}\setminus\gamma$ открыто, то существует такое $\delta > 0$, что $\overline{U_\delta(z_0)} \subset \mathbb{C}\setminus\gamma$. Так как множества γ и $\overline{U_\delta(z_0)}$ замкнуты, то[1] $\rho := \operatorname{dist}(\gamma, \overline{U_\delta(z_0)}) > 0$ (см. рис. 4.1).

Из определения функции $F(z)$ получаем, что при $n = 0$ равенство (4.2) верно. Предположим, что равенство (4.2) выполнено при $n = m-1$, где $m \in \mathbb{N}$. Покажем, что оно выполняется и при $n = m$. Пусть $z \in U^0_\delta(z_0)$. Положим

$$\Delta_m(z) = \frac{F^{m-1}(z) - F^{m-1}(z_0)}{z - z_0} - \frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{m+1}}d\xi.$$

[1] Напомним, что расстоянием между множествами $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ называется величина $\operatorname{dist}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \inf_{\xi_1\in\mathcal{M}_1, \xi_2\in\mathcal{M}_2} |\xi_1 - \xi_2|$.

Из предположения индукции вытекает

$$\frac{F^{m-1}(z)-F^{m-1}(z_0)}{z-z_0}=\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{z-z_0}\left(\frac{1}{(\xi-z)^m}-\frac{1}{(\xi-z_0)^m}\right)d\xi.$$
$$=\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{z-z_0}\left(\frac{(\xi-z_0)^m-(\xi-z)^m}{(\xi-z)^m(\xi-z_0)^m}\right)d\xi. \tag{4.3}$$

Преобразуем выражение под интегралом. Имеем

$$\begin{aligned}(\xi-z_0)^m=((\xi-z)+(z-z_0))^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k(z-z_0)^k(\xi-z)^{m-k}=\\ =(\xi-z)^m+m(\xi-z)^{m-1}(z-z_0)+(z-z_0)^2P(\xi,z),\end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$P(\xi,z)=\begin{cases}0, \quad \text{при} \quad m=1,\\ \sum_{k=2}^m C_m^k(z-z_0)^{k-2}(\xi-z)^{m-k}, \quad \text{при} \quad m>1.\end{cases}$$

Поэтому

$$(\xi-z_0)^m-(\xi-z)^m=m(\xi-z)^{m-1}(z-z_0)+(z-z_0)^2P(\xi,z). \tag{4.5}$$

Подставив (4.5) в (4.3), получим

$$\begin{aligned}&\frac{F^{m-1}(z)-F^{m-1}(z_0)}{z-z_0}=\\ &=\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)\left(\frac{m}{(\xi-z)(\xi-z_0)^m}+\frac{(z-z_0)P(\xi,z)}{(\xi-z)^m(\xi-z_0)^m}\right)d\xi.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Следовательно, $\Delta_m(z)=(z-z_0)\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)g_m(\xi,z)d\xi$, где

$$g_m(z)=\frac{m}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{m+1}}+\frac{P(\xi,z)}{(\xi-z)^m(\xi-z_0)^m}.$$

Поскольку $z\in U_\delta^0(z_0)\subset\overline{U_\delta(z_0)}$, $\xi\in\gamma$ (см. рис.), имеем $|\xi-z|\geq\rho$ и $|\xi-z_0|\geq\rho$. Многочлен P непрерывен, следовательно, и ограничен на компакте $\gamma\times\overline{U}_\delta(z_0)$. Поэтому функция $g_m(\xi,z)$ тоже ограничена на этом компакте. Также функция f ограничена в силу непрерывности на кривой γ. Используя оценку (3.10), для любого $z \in U_\delta^0(z_0)$, получаем

$$|\Delta_m(z)| \le |z - z_0| \frac{(m-1)!}{2\pi} \max_{\xi \in \gamma, z \in \overline{U}_\delta(z_0)} |f(\xi) g_m(\xi, z)| \cdot |\gamma| \to 0$$

при $z \to z_0$. $\square$

Замечание 6. Из свойства аддитивности интеграла следует, что предыдущее предложение останется в силе, если вместо кривой γ взять объединение конечного числа кусочно гладких кривых.

Замечание 7. Отметим, что выражение (4.1) является собственным интегралом, зависящим от параметра. Для вычисления производных таких интегралов справедливы формулы, аналогичные приведенным в курсе математического анализа, из которых сразу следует равенство (4.2). Однако нам было удобнее привести непосредственное доказательство этого равенства.

В качестве следствия интегральной формулы Коши и предыдущего предложения, получаем, что голоморфные функции бесконечно дифференцируемы.

Предложение 14. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{O}(D)$. Тогда функция f бесконечно дифференцируема в D. Более того, в произвольном круге $U_r(a) \Subset D$ производные функции f удовлетворяют соотношениям*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Если дополнительно предположить, что D является областью с простой границей и $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$, то производные функции f в области D удовлетворяют соотношениям

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Доказательство. По условию $f \in \mathcal{O}(\overline{U_r(a)})$. Поэтому из интегральной формулы Коши (3.12) функция f представляется в круге $U_r(a)$ интегралом типа Коши, а именно

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi.$$

Следовательно, равенство (4.7) следует из формулы (4.2). При дополнительных ограничениях на функцию f равенства (4.8) непосредственно вытекают из интегральной теоремы Коши и формулы (4.2). $\square$

4.2 Теорема Лиувилля, доказательство основной теоремы алгебры

Определение 19. Функция, голоморфная во всей комплексной плоскости, называется *целой*.

Следующее очень красивое утверждение имеет многочисленные применения в курсе комплексного анализа.

Теорема 7 (Теорема Лиувилля)**.** *Пусть целая функция f ограничена на всей комплексной плоскости. Тогда f постоянна.*

Доказательство. По условию существует такое число $M > 0$, что $|f(z)| \leq M$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Применяя формулу (4.7) для произвольного круга $U_r(z)$ при $n = 1$, получаем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi. \tag{4.9}$$

Оценим $|f'(z)|$, используя (3.10). Так как $|\xi - z| = r$ при $\xi \in \partial U_r(z)$, и длина окружности $\partial U_r(z)$ равна $2\pi r$, то из формулы (3.10) для оценки интеграла (4.9) имеем

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \to 0$$

при $r \to \infty$. Таким образом, $f'(z) \equiv 0$, следовательно, f является постоянной функцией. $\square$

Следствие 4 (Основная теорема алгебры)**.** *Любой непостоянный многочлен $P(z)$ имеет комплексный корень.*

Доказательство. По условию $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, где $n \geq 1$ и $a_n \neq 0$. Так как $|P(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n - (|a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_0|)$, то $\lim_{z \to \infty} |P(z)| = \infty$.

Предположим, от противного, что $P(z)$ не имеет корней. Тогда функция $Q(z) = \frac{1}{P(z)}$ является целой. Покажем, что $Q(z)$ ограничена. Так как $\lim_{z\to\infty} Q(z) = \frac{1}{\lim_{z\to\infty} P(z)} = 0$, то существует такое $R > 0$, что $|Q(z)| < 1$ при $|z| > R$. Также $Q(z)$ непрерывна, поэтому и ограничена на компакте $|z| \le R$, следовательно, существует такое $M > 0$, что $|Q(z)| \le M$ при $|z| \le R$. Поэтому $|Q(z)| \le \max(M, 1)$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Таким образом, $Q(z)$ — целая ограниченная функция. Из теоремы Лиувилля следует, что $Q(z)$ постоянна. Но тогда и $P(z)$ постоянна, что противоречит условию. □

4.3 Первообразная. Теорема Мореры.

По аналогии с действительным случаем вводится определение первообразной непрерывной функции комплексного переменного.

Определение 20. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область и $f \in C(D)$. Функция $F \in \mathcal{O}(D)$ называется *первообразной функции f в области D*, если $F'(z) = f(z)$ для любой точки $z \in D$.

Как и в курсе математического анализа, справедливо следующее утверждение.

Предложение 15. *Пусть функция F_1 является первообразной функции f в области D. Тогда функция F_2 является первообразной функции f в области D $\iff$ существует такое число $C \in \mathbb{C}$, что $F_2(z) = F_1(z) + C$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть F_2 является первообразной функции f в области D. Положим $F(z) = F_1(z) - F_2(z)$. Тогда $F' \equiv 0$ всюду в области D. Представим $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Из соотношений (2.4), получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ всюду в D. Поэтому, по теореме из курса математического анализа, получаем, что функция $F(z)$ постоянна в D.

Достаточность очевидна. □

Из курса математического анализа известно, что любая функция, непрерывная на отрезке, имеет на нем первообразную. Однако непрерывности функции комплексного переменного уже недостаточно для существования первообразной. Действительно, если функция F является первообразной непрерывной функции f в области D, то $F \in \mathcal{O}(D)$, следовательно, F бесконечно дифференцируема в D. Так как $f = F'$, то и $f \in \mathcal{O}(D)$. Таким образом, **функция, имеющая первообразную в области, является голоморфной в этой области**.

Найдем необходимые и достаточные условия существования первообразной. Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, назовем *открытым треугольником с вершинами A, B, C* область Δ, ограниченную треугольником ABC. Докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 16. *Пусть $f \in C(U_r(a))$, причем для любых двух точек z_1, $z_2 \in U_r(a)$ справедливо равенство*

$$\int_{[a,z_1]} f(\xi)d\xi + \int_{[z_1,z_2]} f(\xi)d\xi + \int_{[z_2,a]} f(\xi)d\xi = 0. \tag{4.10}$$

Тогда $f \in \mathcal{O}(U_r(a))$ и функция $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi$ является первообразной функции f в круге $U_r(a)$ (здесь $[a, z_1]$ — отрезок с началом в точке a и концом в точке z, аналогично определяются два остальных отрезка[2]*).*

Доказательство. Рассмотрим любую точку $z_0 \in U_r(a)$ и покажем, что $F'(z_0) = f(z_0)$. Беря $z_1 = z_0$, $z_2 = z \in U_r(a)$ в равенстве (4.10), получаем

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi.$$

Из формулы Ньютона-Лейбница (3.7) имеем $\int_{[z_0,z]} d\xi = z - z_0$. Таким образом

$$\Delta(z) := \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} \left(f(\xi) - f(z_0)\right) d\xi. \tag{4.11}$$

Используя оценку (3.10) и непрерывность функции f, получаем

$$|\Delta(z)| \le \max_{\xi \in [z_0,z]} |f(\xi) - f(z_0)| \to 0$$

при $z \to z_0$. Тем самым F является первообразной для f и, следовательно, $f \in \mathcal{O}((U_r(a))$. $\square$

[2]Если точки a, z_1, z_2 лежат на одной прямой, то условие (4.10) автоматически следует из свойства аддитивности интеграла. Если же точки a, z_1, z_2 не лежат на одной прямой, то условие (4.10) означает, что интеграл от функции f по границе открытого треугольника с вершинами a, z_1, z_2 равен нулю.

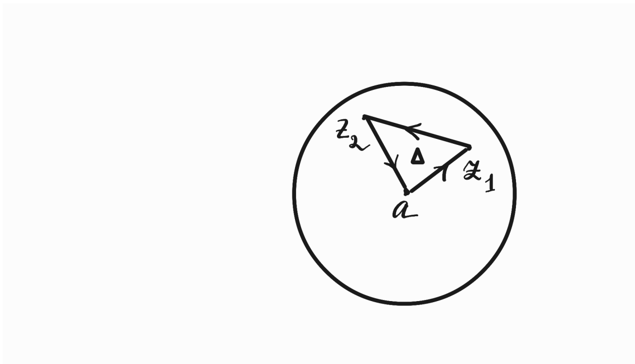


Рис. 4.2:

Следствие 5. *Любая функция f, голоморфная в открытом круге $U_r(a)$, имеет в нем первообразную $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{O}(U_r(a))$. Возьмем любые две точки z_1, $z_2 \in U_r(a)$. Если точки z_1, z_2 и a лежат на одной прямой, то условие (4.10) следует из свойства аддитивности интеграла. Иначе рассмотрим открытый треугольник Δ с вершинами в этих точках (см. рис. 4.2). Так как $\overline{\Delta} \subset U_r(a)$, то по интегральной теореме Коши имеем $\int_{\partial\Delta} f(\xi)d\xi = 0$, что влечет равенство (4.10). Далее нужно воспользоваться предыдущим предложением. □

Приведем необходимые и достаточные условия существования первообразной в случае произвольной области.

Предложение 17. *Пусть функция f голоморфна в области D. Тогда f имеет первообразную в D $\iff$ для любой замкнутой кусочно гладкой кривой γ, лежащей в области D справедливо равенство $\int_\gamma f(\xi)d\xi = 0$. При этом для любой точки $z_0 \in D$ функция*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi, \tag{4.12}$$

где интеграл берется по любой кусочно гладкой кривой с началом в точке z_0 и концом в точке z, является первообразной функции $f(z)$ в области D.

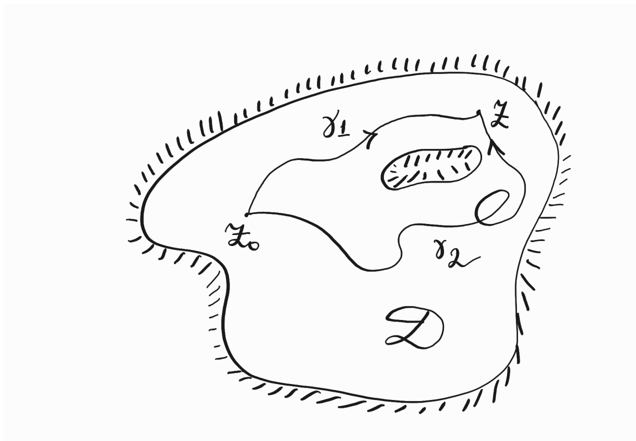


Рис. 4.3:

Доказательство. Необходимость. Пусть функция F является первообразной для f и γ — произвольная кусочно гладкая кривая, лежащая в D, с началом и концом в точке z_0. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi = \int_\gamma F'(\xi)d\xi = F(z_0) - F(z_0) = 0.$$

Достаточность. Пусть интеграл от функции f по любой замкнутой кусочно гладкой кривой, лежащей в области D равен нулю. Тогда функция F из (4.12) определена корректно, так как для любых кусочно гладких кривых γ_1 и γ_2, лежащих в D, с общим началом z_0 и общим концом z кривая $\gamma = \gamma_1 \cup {\gamma_2}^-$ является замкнутой кусочно гладкой, поэтому $\int_{\gamma_1} f(\xi)d\xi - \int_{\gamma_2} f(\xi)d\xi = \int_\gamma f(\xi)d\xi = 0$, следовательно, $\int_{\gamma_1} f(\xi)d\xi = \int_{\gamma_2} f(\xi)d\xi$ (см. рис. 4.3).

Проверим, что функция F является первообразной для f в любом круге $U_r(a) \subset D$. Действительно, представим

$$F(z) = \int_{z_0}^a f(\xi)d\xi + \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi.$$

Так как $\int_{z_0}^a f(\xi)d\xi$ — константа, а функция $\int_{[a,z]} f(\xi)d\xi$ является первообразной функции f в круге $U_r(a)$ по следствию 5, то и функция F является первообразной для f в круге $U_r(a)$. $\square$

Покажем, что в области произвольного вида уже не всякая голоморфная функция имеет первообразную.

Пример. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, γ — окружность единичного радиуса с центром в нуле. Из (3.8) имеем $\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi} = 2\pi i \neq 0$, поэтому функция f не имеет первообразной в области D.

Следующее утверждение приведем без доказательства.

Предложение 18. *Любая функция, голоморфная в односвязной области, имеет в ней первообразную.*

Из предложения 16 следует очень важное достаточное условие голоморфности.

Теорема 8 (Теорема Мореры)**.** *Пусть функция f непрерывна в области D и интеграл от функции f по границе любого открытого треугольника, компактно принадлежащего области D, равен нулю. Тогда $f \in \mathcal{O}(D)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что функция f голоморфна в любом открытом круге $U_r(a) \subset D$. По условию, для любых двух точек z_1, $z_2 \in U_r(a)$ справедливо равенство (4.10). Поэтому функция f имеет первообразную в круге $U_r(a)$ в силу предложения 16. Следовательно $f \in \mathcal{O}(U_r(a))$. □

4.4 Элементарные сведения о гармонических функциях

Определение 21. Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Функция $u \in C^2(D)$ называется *гармонической* в области D, если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4.13}$$

в точках области D. Уравнение (4.13) называется *уравнением Лапласа*, а оператор $\Delta := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ называется *оператором Лапласа.*

Следующее предложение показывает, что гармонические функции тесно связаны с голоморфными.

Предложение 19. *Пусть функция f голоморфна в области D. Тогда ее действительная и мнимая части $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ бесконечно дифференцируемы и являются гармоническими функциями в области D.*

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{O}(D)$, то f бесконечно дифференцируема в D. Из формул (2.4) для функции f и для всех ее производных следует, что функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные всех порядков, следовательно, эти функции бесконечно дифференцируемы в области D. Дифференцируя первое из условий Коши-Римана (2.3) по x, а второе по y, получаем два равенства

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Сложив их и учитывая равенство смешанных производных $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, имеем $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Аналогично получаем $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. $\square$

Определение 22. Две гармонические функции u и v в области D называются *гармонически сопряженными* в области D, если существует такая функция $f \in \mathcal{O}(D)$, что $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Предложение 20. *Для любой функции u, гармонической в круге $U_r(a)$ существует такая функция $f \in \mathcal{O}(U_r(a))$, что $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ при $z \in U_r(a)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\phi(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Проверим, что $\phi \in \mathcal{O}(D)$. Во-первых, функции $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ и $v_1 = -\frac{\partial u}{\partial y}$ дифференцируемы и их частные производные непрерывны в D, поскольку $u \in C^2(D)$. Во-вторых,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

так как функция u является гармонической. Также

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

в силу равенства смешанных производных. Поэтому по теореме 1 функция ϕ дифференцируема в каждой точке области D и ее производная

$\phi'(z) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ непрерывна в области D. Тем самым $\phi \in \mathcal{O}(D)$.

В силу предложения 16, функция ϕ имеет первообразную $F(z) = u_2(x, y) + v_2(x, y)$ в области D. Из условий Коши-Римана (2.3) и соотношений (2.4) для функции F, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \phi(z) = F'(z) = \frac{\partial u_2}{\partial x} - i\frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Отсюда в каждой точке области D справедливы равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Поэтому существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $u_2(x, y) = u(x, y) + \lambda$ во всех точках области D. Беря $f(z) = F(z) - \lambda$, получаем $u(x, y) = u_2(x, y) - \lambda = \operatorname{Re} F(z) - \lambda = \operatorname{Re} f(z)$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 6. *Пусть функция $u(x, y)$ является гармонической в области D. Тогда эта функция бесконечно дифференцируема в D и все ее частные производные любого порядка тоже являются гармоническими функциями в области D.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный круг $U_r(a) \subset D$. В силу предложения 20, существует такая $f \in \mathcal{O}(U_r(a))$, что $u = \operatorname{Re} f$ в круге $U_r(a)$. Из предложения 19 получаем, что u бесконечно дифференцируема в $U_r(a)$, а следовательно, и в области D в силу произвольности круга $U_r(a)$. Поскольку $f' \in \mathcal{O}(U_r(a))$ и $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ в силу (2.4), то из предложения 19 получаем, что частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ являются гармоническими функциями. Далее нужно в предыдущих рассуждениях взять вместо функции u ее частные производные по x и по y и т.д.

$\square$

Покажем, что для гармонических функций, как и для голоморфных функций, справедлива теорема о среднем.

Предложение 21 (Теорема о среднем для гармонических функций.)**.** *Пусть функция u является гармонической в круге $U_R(a)$, $a = a_1 + ia_2$. Тогда для любого $r \in (0, R)$ справедливо равенство*

$$u(a_1, a_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a_1 + r\cos t, a_2 + r\sin t)dt. \tag{4.14}$$

Доказательство. В силу предложения 20, $u = \operatorname{Re} f$ для некоторой $f \in \mathcal{O}(U_R(a))$. По формуле среднего значения (3.15) для функции f имеем $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$. Поэтому

$$u(a_1, a_2) = \operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a_1 + r\cos t, a_2 + r\sin t)dt$$

□

Следующее утверждение приведем без доказательства.

Предложение 22. *Для любой функции u, гармонической в односвязной области D существует такая функция $f \in \mathcal{O}(D)$, что $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ при $z \in D$.*

Глава 5

Ряды голоморфных функций. Первая теорема Вейерштрасса. Степенные ряды. Ряд Тейлора голоморфной функции. Нули голоморфных функций. Теорема единственности

5.1 Равномерно сходящиеся ряды функций комплексного переменного и их свойства. Понятие равномерной сходимости внутри области. Первая теорема Вейерштрасса

Поточечная и равномерная сходимость ряда функций комплексного переменного определяется так же, как и в курсе математического анализа. Пусть каждая из функций $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ определена на множестве E.

Тогда на множестве E определен ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \qquad (5.1)$$

частичные суммы которого будем обозначать $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$.

Определение 23. Ряд (5.1) называется *сходящимся* на множестве E к сумме $S(z)$, если $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ в каждой точке $z \in E$.

Определение 24. Ряд (5.1) называется *равномерно сходящимся* на множестве E к сумме $S(z)$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq \mathbb{N}$ и всех $z \in E$ справедливо неравенство

$$|S(z) - S_n(z)| < \epsilon. \qquad (5.2)$$

Точно так же, как и в курсе математического анализа показывается, что ряд (5.1) сходится равномерно к сумме $S(z) \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in E} |S(z) - S_n(z)| = 0$.

Из определения сразу следуют свойства равномерно сходящихся рядов:

1. Пусть ряд (5.1) сходится равномерно на множестве E к сумме $S(z)$. Тогда он сходится равномерно к $S(z)$ на любом подмножестве $E_1 \subset E$.

2. Пусть ряд (5.1) сходится равномерно на каждом из множеств E_j, $1 \leq j \leq n$ к сумме $S(z)$. Тогда он сходится равномерно к $S(z)$ и на их объединении $\cup_{j=1}^{n} E_j$.

3. Пусть ряд (5.1) сходится равномерно на множестве E к сумме $S(z)$ и функция $g(z)$ ограничена на множестве E. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)g(z)$ сходится равномерно на множестве E к сумме $S(z)g(z)$.

Представим

$$u_n(x,y) = \operatorname{Re} f_n(x,y), \quad v_n(x,y) = \operatorname{Im} f_n(x,y),$$

$$S_n^1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x,y), \quad S_n^2(x,y) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x,y),$$

$$S^1(x,y) = \operatorname{Re} S(z), \quad S^2(x,y) = \operatorname{Im} S(z).$$

Используя для каждого $n \in \mathbb{N}$, как и раньше, двойное неравенство

$$\max(|S_n^1(x,y)-S^1(x,y)|,|S_n^2(x,y)-S^2(x,y)|)\le|S_n(z)-S(z)|\le$$
$$\le|S_n^1(x,y)-S^1(x,y)|+|S_n^2(x,y)-S^2(x,y)|,$$
получаем, что справедливо

Предложение 23. *Ряд* (5.1) *сходится равномерно на множестве E к сумме $S(z)$ $\iff$ ряды из действительных функций $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,y)$ сходятся равномерно на множестве E к суммам $S^1(x,y)$ и $S^2(x,y)$ соответственно.*

Поэтому из критерия Коши и признака Вейерштрасса равномерной сходимости действительных рядов на множестве E вытекают

Критерий Коши равномерной сходимости ряда функций комплексного переменного. Ряд (5.1) сходится равномерно на множестве E $\iff$ для любого $\epsilon>0$ существует такое $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$, что для всех $n\ge N$, $p\in\mathbb{N}$ и $z\in E$ справедливо неравенство
$$|f_{n+1}(z)+\dots+f_{n+p}(z)|<\epsilon.$$

Признак Вейерштрасса. Если существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и $z\in E$ справедливо неравенство $|f_n(z)|\le p_n$, то ряд (5.1) сходится равномерно на множестве E.

Из предложения 23 и функциональных свойств действительных рядов следуют

Функциональные свойства равномерно сходящихся комплексных рядов.

1. Пусть ряд (5.1) равномерно сходится на множестве E к сумме $S(z)$ и $f_n\in C(E)$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда $S\in C(E)$.

2. Пусть каждая из функций f_n, $n\in\mathbb{N}$, непрерывна вдоль кусочно гладкой кривой γ и ряд (5.1) сходится равномерно на γ к сумме $S(z)$. Тогда этот ряд допускает почленное интегрирование вдоль γ, то есть
$$\int_\gamma S(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz. \tag{5.3}$$

Нужно сказать, что равномерная сходимость ряда из непрерывных функций на всем множестве E является лишь достаточным условием непрерывности суммы ряда на множестве E. Во многих очень важных для нас случаях ее нет. Поэтому введем более гибкое понятие равномерной сходимости внутри области.

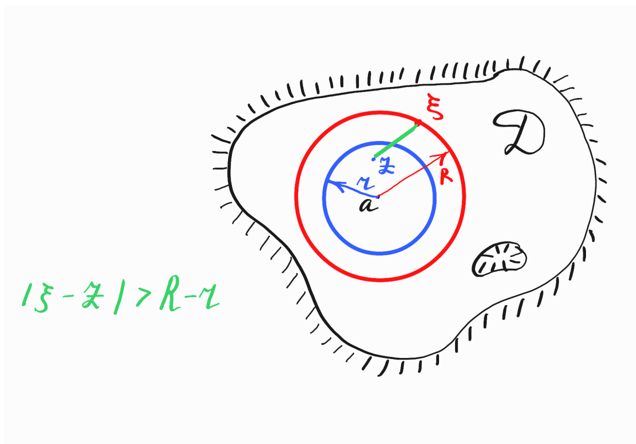


Рис. 5.1:

Определение 25. Ряд (5.1), определенный в области D называется *равномерно сходящимся внутри* D, если этот ряд сходится равномерно на любом множестве $E \Subset D$.

Теорема 9 (Первая теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций)**.** *Пусть ряд* (5.1) *сходится равномерно внутри области* D *и все члены ряда являются голоморфными функциями. Тогда сумма* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *также голоморфна в* D *и для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо разложение*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \tag{5.4}$$

причем ряд в правой части (5.4) *сходится равномерно внутри* D.

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный открытый круг $U_r(z_0) \Subset D$. Покажем, что $f \in \mathcal{O}(U_r(z_0))$. Тогда, в силу произвольности $U_r(z_0)$, получим, что $f \in \mathcal{O}(D)$. По условию ряд (5.1) сходится равномерно в $U_r(z_0)$, следовательно, $f \in C(U_r(z_0))$. Так как $f_n \in \mathcal{O}(U_r(z_0))$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то для любого открытого треугольника $\Delta \Subset U_r(z_0)$ в силу интегральной теоремы Коши имеем $\int_{\partial\Delta} f_n(\xi)d\xi = 0$. Из равномерной сходимости ряда (5.1) на границе треугольника следует возможность почленного интегрирования

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(\xi)d\xi = 0.$$

Отсюда, по теореме Мореры, $f \in \mathcal{O}(U_r(z_0))$.

2. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Сперва покажем, что ряд в правой части (5.4) сходится равномерно к $f^{(k)}(z)$ в любом открытом круге $U_r(a) \Subset D$ Поскольку $U_r(a) \Subset D$, существует такое $R > r$, что $U_R(a) \Subset D$. Так как $f \in \mathcal{O}(D)$, то $f \in \mathcal{O}(\overline{U_R(a)})$ и из формул (4.7) в точках $z \in U_r(a)$ имеем

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial U_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi, \quad f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial U_R(a)} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi. \tag{5.5}$$

Отметим, что $|\xi - z| > R - r$ при всех $\xi \in \partial U_R(a)$, $z \in U_r(a)$ (см. рис. 5.1). Поэтому, учитывая равномерную сходимость ряда (5.1) на окружности $\partial U_R(a)$, получаем

$$\left| f^{(k)}(z) - \sum_{j=1}^{n} f_n^{(k)}(z) \right| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\partial U_R(a)} \frac{f(\xi) - \sum_{j=1}^{n} f_j(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\sup_{\xi \in \partial U_R(a)} \left| f(\xi) - \sum_{j=1}^{n} f_j(\xi) \right|}{(R - r)^{k+1}} 2\pi R.$$

Это выражение не зависит от z и стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу равномерной сходимости ряда (5.1) на окружности $\partial U_R(a)$. Поэтому ряд в правой части (5.4) сходится равномерно в круге $U_r(a)$.

Покажем теперь, что ряд в правой части (5.4) сходится равномерно на любом множестве $Q \Subset D$. В силу компактности множества $\overline{Q}$, существует конечное число кругов $U_{r_j}(z_j) \Subset D$, $1 \leq j \leq m$ такое, что $\overline{Q} \subset \cup_{j=1}^{m} U_{r_j}(z_j)$. Из равномерной сходимости ряда на каждом из этих кругов, получаем, что он сходится равномерно на их объединении $\cup_{j=1}^{m} U_{r_j}(z_j)$, а значит и на множестве Q.

$\square$

5.2 Степенные ряды и их свойства

Определение 26. Пусть $\{a_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $a \in \mathbb{C}$. Выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \tag{5.6}$$

называется *степенным рядом с центром в точке* a. Число

$$R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \in [0, +\infty] \tag{5.7}$$

называется *радиусом сходимости* ряда (5.6). Круг $U_R(a)$ называется *кругом сходимости* ряда (5.6). Формула (5.7) для нахождения радиуса сходимости называется *формулой Коши-Адамара.*

Точно так же, как и в курсе математического анализа доказывается

Теорема 10 (Теорема Коши-Адамара)**.** *Ряд* (5.6) *сходится абсолютно при* $z \in U_R(a)$ *и расходится при* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(a)}$.

Следующее утверждение тоже аналогично приведенному в курсе математического анализа.

Предложение 24. *Степенной ряд* (5.6) *сходится равномерно внутри своего круга сходимости.*

Доказательство. Пусть $Q \Subset U_R(a)$. Тогда существует такое $r \in (0, R)$, что $Q \subset \overline{U_r(a)}$. По теореме Коши-Адамара, ряд (5.6) сходится абсолютно в точке $a + r$, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Так как для любого $z \in Q$ имеем $|z - a| \le r$, то $|a_n(z-a)^n| \le |a_n| r^n$, поэтому ряд (5.6) сходится равномерно на множестве Q по признаку Вейерштрасса. □

Далее считаем, что радиус R сходимости ряда (5.6) отличен от нуля. Тогда в круге $U_R(a)$ определена функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$.

Из предыдущего предложения вытекает

Следствие 7 (Почленное интегрирование степенного ряда)**.** *Для любого* $z \in U_R(a)$ *справедливо представление*

$$\int_a^z f(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}, \tag{5.8}$$

где интегрирование ведется по любой кусочно гладкой кривой γ*, лежащей в круге* $U_R(a)$ *с началом в точке* a *и концом в точке* z*.*

Доказательство. Так как γ — компакт, то из предыдущего предложения получаем, что ряд (5.6) сходится равномерно на γ. Поэтому формула (5.8) получается почленным интегрированием ряда (5.6). □

Первая теорема Вейерштрасса влечет

Следствие 8 (Почленное дифференцирование степенного ряда). *Сумма степенного ряда* (5.6) *голоморфна в его круге сходимости. Для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо представление*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}. \qquad (5.9)$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в курсе математического анализа, получаем, что радиусы сходимости рядов в правой части формул (5.8), (5.9) также равны R.

5.3 Ряд Тейлора голоморфной функции

Определение 27. Пусть $f \in \mathcal{O}(a)$[1]. Степенной ряд

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (5.10)$$

называется *рядом Тейлора функции* f *с центром в точке* a.

Предложение 25. *Пусть* f *является суммой ряда* (5.6) *с радиусом сходимости* $R \neq 0$. *Тогда ряд* (5.6) *является рядом Тейлора функции* f *с центром в точке* a *и для любого* $r \in (0, R)$ *справедливы равенства*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, \ldots. \qquad (5.11)$$

Доказательство. Подставив $z = a$ в формулы (5.6), (5.9), получаем $f(a) = a_0$, $f^{(k)}(a) = k!a_k$, следовательно, ряд (5.6) совпадает с рядом (5.10). Поэтому равенства (6.7) следуют из (4.7). □

Следствие 9 (Единственность разложения в степенной ряд). *Если функция* f *голоморфна в круге* $U_r(a)$ *и задается в нем сходящимся степенным рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n,$$

то этот ряд является рядом Тейлора функции f *с центром в точке* a.

[1] Напомним, что $f \in \mathcal{O}(a)$, если функция f голоморфна в некоторой окрестности точки a.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ и $F(z)$ — сумма этого ряда в точках круга $U_R(a)$. Согласно условию, $r \le R$. Так как $F(z) = f(z)$ в круге $U_r(a)$, то $b_n = \frac{F^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, следовательно, данный ряд является рядом Тейлора функции f с центром в точке a. $\square$

Предложение 26 (Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда)**.** *Пусть $R \ne 0$ является радиусом сходимости ряда* (5.6)*, а f — его суммой. Для $r \in (0, R)$ положим $M(r) = \max_{\xi \in \partial U_r(a)} |f(\xi)|$. Тогда коэффициенты ряда* (5.6) *удовлетворяют неравенствам Коши:*

$$|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n}. \tag{5.12}$$

Доказательство. Оценим интеграл в (6.7) с помощью (3.9):

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}.$$

$\square$

Теорема 11 (Теорема Тейлора о разложении голоморфной функции в степенной ряд)**.** *Пусть функция f голоморфна в области D и $U_r(a) \subset D$. Тогда ряд Тейлора функции f с центром в точке a сходится к функции f в круге $U_r(a)$.*

Доказательство. Зафиксируем точку $z \in U_r(a)$ и число $\rho \in (|z-a|, r)$. Так как $f \in \mathcal{O}(\overline{U_\rho(a)})$, то из интегральной формулы Коши (3.12) получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Положим $M(\rho) = \max_{\xi \in \partial U_\rho(a)} |f(\xi)|$. Поскольку в точках $\xi \in \partial U_\rho(a)$ справедлива оценка $|z-a| < \rho = |\xi - a|$ (см. рис 5.2), подынтегральное выражение раскладывается в геометрическую прогрессию

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{f(\xi)}{\xi - a} \left(1 - \frac{z-a}{\xi - a}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}. \tag{5.13}$$

Так как

$$\max_{\xi \in \partial U_\rho(a)} \left| \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \right| \le \frac{M(\rho)}{\rho} \left(\frac{|z-a|}{\rho} \right)^n,$$

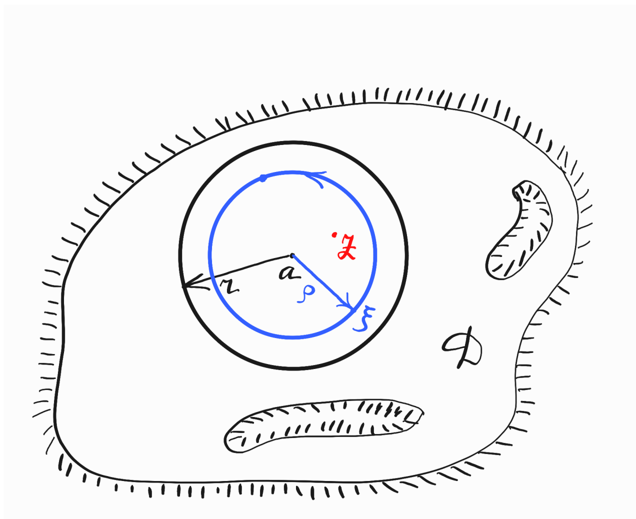


Рис. 5.2:

то ряд в правой части (5.13) сходится равномерно (относительно параметра ξ) на окружности $\partial U_\rho(a)$ по признаку Вейерштрасса, ибо он мажорируется сходящейся и не зависящей от параметра ξ геометрической прогрессией.

Поэтому ряд (5.13) допускает почленное интегрирование, следовательно

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

что и требовалось доказать. (Последнее равенство следует из формул (4.7)). $\square$

Из теоремы Тейлора следует, что ряды Тейлора целых функций сходятся к ним на всей комплексной плоскости. Таким образом, например, получаем, что разложения

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

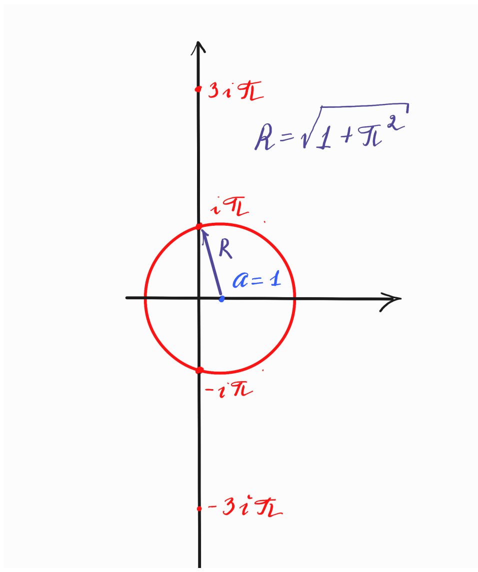


Рис. 5.3:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

справедливы при всех $z \in \mathbb{C}$.

Теорема Тейлора позволяет также найти радиус сходимости ряда Тейлора, не проводя самого разложения.

Пример. Найти радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z) = \frac{e^{\cos z}}{e^z+1}$ с центром в точке $a = 1$.

Функция $f(z)$ является голоморфной в области $D = \mathbb{C}\setminus\{i\pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}\}$. Следовательно, по теореме Тейлора функция $f(z)$ разложима в ряд Тейлора в любом круге $U_r(a)$, содержащемся в области D. Поскольку $\lim_{z\to i\pi(2k+1)} f(z) = \infty$, круг сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ не содержит точек $i\pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$. Круг максимального радиуса с центром $a = 1$, обладающий таким свойством, имеет радиус $\sqrt{1+\pi^2}$ (см. рис. 5.3). Поэтому искомый радиус равен $\sqrt{1+\pi^2}$.

5.4 Нули голоморфных функций, теорема единственности

Предложение 27. *Пусть функция $f \in \mathcal{O}(a)$, $f(a) = 0$ и f не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки a. Тогда:*

а) существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^{(n)}(a) \neq 0$, $f^{(k)}(a) = 0$ при всех натуральных k меньших n;

б) в некотором круге $U_r(a)$ справедливо представление

$$f(z) = (z-a)^n g(z), \tag{5.14}$$

где функция g голоморфна в круге $U_r(a)$ и отлична от нуля всюду в этом круге.

Доказательство. а) По условию $f \in \mathcal{O}(U_\rho(a))$ для некоторого $\rho > 0$. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ — ряд Тейлора функции f с центром в точке a. По теореме Тейлора, в точках $z \in U_\rho(a)$ этот ряд сходится к $f(z)$ и, поскольку функция f непостоянна в круге $U_\rho(a)$, то не все коэффициенты ряда равны нулю. Так как $f(a) = 0$, то $a_0 = 0$. Тогда число $n = \min\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$ — искомое.

б) При $z \in U_\rho(a)$ имеем

$$\begin{aligned} f(z) =& a_n(z-a)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots = (z-a)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n} = \\ =& (z-a)^n g(z), \quad \text{где} \quad g(z) = a_n + a_{n+1}(z-a) + \dots . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Из равенства (5.15) следует, что ряд $a_n + a_{n+1}(z-a) + \dots$ сходится в круге $U_\rho(a)$, поэтому его радиус сходимости не меньше ρ и его сумма $g(z)$ голоморфна, а значит и непрерывна в круге $U_\rho(a)$. Так как $g(a) = a_n \neq 0$, то существует такое $r \in (0, \rho]$, что $g(z) \neq 0$ в точках круга $U_r(a)$. □

Определение 28. Пусть функция $f \in \mathcal{O}(a)$, $f(a) = 0$ и f не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки a. Число

$$n = \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

называется *порядком нуля* функции f в точке a.

Следствие 10 (Изолированность нулей голоморфной функции)**.** *Пусть функция f голоморфна в области D и обращается в нуль в некоторой точке $a \in D$. Тогда существует такой круг $U_r(a) \subset D$, что либо функция f тождественно равна нулю в этом круге, либо $f(z) \neq 0$ при $z \in U_r^0(a)$.*

Теорема 12 (Теорема единственности)**.** *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и $E \subset D$ — ее подмножество, имеющее предельную точку $a \in D$*[2]*. Тогда если $f_1,\ f_2 \in \mathcal{O}(D)$ и $f_1(z) = f_2(z)$ при всех $z \in E$, то $f_1(z) = f_2(z)$ при всех $z \in D$.*

Для доказательства теоремы единственности нам понадобится следующее свойство области:

Лемма 1 (Лемма об открыто-замкнутом множестве)**.** *Пусть V — такое непустое подмножество области D, что:*

а) V открыто,

б) V замкнуто в D, то есть для любой последовательности $\{z_n\} \subset V$, сходящейся к числу $z_0 \in D$ выполняется включение $z_0 \in V$.

Тогда $V = D$.

Доказательство. Так как $V \neq \emptyset$, то существует точка $z_1 \in V$. Допустим от противного, что $V \neq D$. Возьмем точку $z_2 \in D \setminus V$. Так как область является линейно связным множеством, то существует кривая $\gamma : [a, b] \to D$ с началом $\gamma(a) = z_1$ и концом $\gamma(b) = z_2$. Построим последовательность вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \cdots \supset [a_n, b_n] \ldots$$

по следующему правилу:

1) $a_1 = a$, $b_1 = b$. Тем самым $\gamma(a_1) \in V$, $\gamma(b_1) \in D \setminus V$.

2) Если $\gamma(\frac{a_n+b_n}{2}) \in V$, то $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$. Иначе $a_{n+1} = a$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

По построению $\gamma(a_k) \in V$, $\gamma(b_k) \in D \setminus V$, $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. По теореме из математического анализа о вложенных отрезках, длины которых стремятся к нулю, получаем, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к одному и тому же числу $c \in [a, b]$. Пусть $z_0 = \gamma(c)$ (см. рис. 5.4). Поскольку кривая γ непрерывна, последовательности $\{\gamma(a_n)\}$ и $\{\gamma(b_n)\}$ сходятся к z_0.

[2] т.е. для любого $\rho > 0$ пересечение $E \cap U_\rho^0(a)$ непусто.

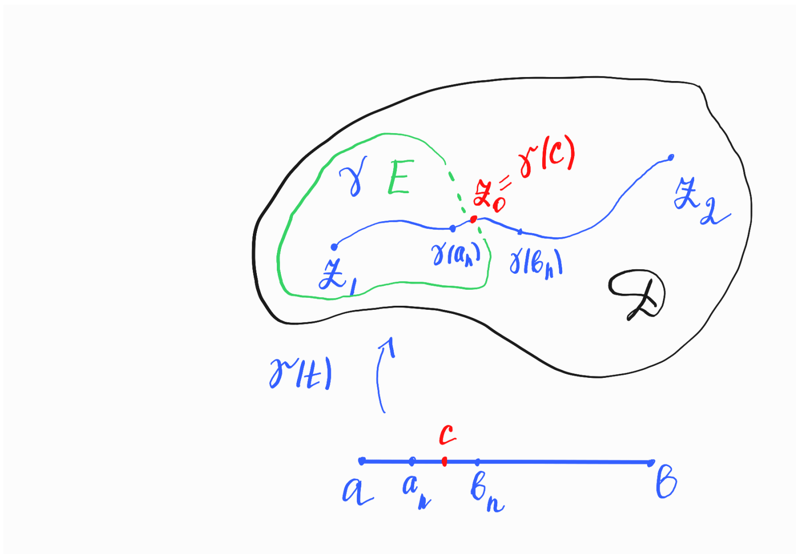


Рис. 5.4:

Так как V замкнуто в D, то $z_0 \in V$.

Так как V открыто, то существует круг $U_r(z_0) \subset V$. Но последовательность $\{\gamma(b_n)\}$ точек из $D \setminus V$ сходится к z_0, значит, все ее члены, кроме, быть может, конечного числа, лежат в круге $U_r(z_0)$, что невозможно. $\square$

Доказательство теоремы единственности. Пусть $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$. Тогда функция g голоморфна в D и обращается в нуль в точках множества E. В силу следствия 10 существует круг $U_r(a)$, в котором функция g тождественно равна нулю.

Рассмотрим множество V точек $z \in D$ таких, что g тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки z. Так как $a \in D$, то $V \neq \emptyset$. По построению множество V открыто.

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность точек из V, сходящаяся к точке $z_0 \in D$. Так как g непрерывна и $g(z_n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $g(z_0) = 0$. Возможны два случая: либо $z_0 = z_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, либо $z_n \neq z_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В первом случае $z_0 = z_n \in V$. Во втором случае в каждой проколотой окрестности точки z_0 есть точки последовательности $\{z_n\}$, значит z_0 — неизолированный нуль функции g, и, согласно следствию 10, g тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки z_0. Поэтому $z_0 \in V$. Таким образом, V замкнуто в D.

По лемме об открыто-замкнутом множестве получаем, что $V = D$. Следовательно, $f_1(z) = f_2(z)$ для всех $z \in D$. $\square$

Следующий пример показывает, что условие $a \in D$ для предельной точки a множества E существенно.

Пример. Пусть $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f_1(z) = \sin(\frac{\pi}{z})$, $f_2(z) \equiv 0$, $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Тогда множество E имеет предельную точку $a = 0$, однако $f_1 \not\equiv f_2$.

Теорема единственности позволяет уточнить следствие 10 об изолированности нулей голоморфной функции.

Следствие 11. *Пусть непостоянная функция f голоморфна в области D и равна нулю в точке $a \in D$. Тогда существует такой круг $U_r(a) \subset D$, что $f(z) \neq 0$ при $z \in U_r^0(a)$. Иными словами, все нули непостоянной голоморфной функции изолированы.*

Глава 6

Ряды Лорана. Изолированные особые точки голоморфных функций.

Ряды Лорана, изучаемые в этой лекции, являются обобщением рядов Тейлора и позволяют исследовать поведение голоморфной функции вблизи ее изолированных особенностей.

6.1 Ряды Лорана и их свойства

Далее для чисел $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$ через $K_{r_1,r_2}(a)$ будем обозначать кольцо $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\}$.

Определение 29. Пусть a и a_n, $n \in \mathbb{Z}$ — комплексные числа. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \tag{6.1}$$

называется *рядом Лорана.* Часть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \tag{6.2}$$

называется *правильной частью* ряда (6.1), а оставшаяся часть

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} \tag{6.3}$$

называется *главной частью* ряда (6.1). Ряд (6.1) называется сходящимся, если одновременно сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n},$$

представляющие соответственно его правильную и главную части.

Предложение 28 (Сходимость ряда Лорана)**.** *Пусть* $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, $r = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$. *Тогда:*

1. Если $R < r$, *то ряд* (6.1) *расходится в каждой точке* $z \in \mathbb{C}$.

2. Если $r < R$, *то* (6.1) *сходится абсолютно в кольце* $K_{r,R}(a)$, *расходится если* $|z-a| < r$ *или* $|z-a| > R$. *При этом каждый из рядов* (6.2), (6.3) *сходится равномерно внутри кольца* $K_{r,R}(a)$.

Доказательство. По теореме Коши-Адамара, число R является радиусом сходимости ряда (6.2). Следовательно, этот ряд сходится абсолютно в круге $U_R(a)$ и расходится при $|z-a| > R$. В силу предложения 24, ряд (6.2) сходится равномерно внутри круга $U_R(a)$.

Рассмотрим теперь ряд (6.3) по отрицательным степеням. Замена $\zeta = (z-a)^{-1}$ превращает этот ряд в степенной:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n. \tag{6.4}$$

Вновь применяя теорему Коши-Адамара, получаем, что ряд (6.4) сходится абсолютно при $|\zeta| < r^{-1}$ и расходится при $|\zeta| > r^{-1}$. В силу предложения 24, ряд (6.4) сходится равномерно внутри круга $U_{\frac{1}{r}}(a)$. Делая обратную замену $z - a = \frac{1}{\zeta}$, получаем, что ряд (6.3) сходится абсолютно при $|z-a| > r$, расходится при $|z-a| < r$ и сходится равномерно внутри множества $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$. □

Определение 30. Пусть $r < R$ — те же, что и в предыдущем предложении. Будем называть множество $K_{r,R}(a)$ *кольцом сходимости* ряда (6.1).

Предложение 29 (Формулы для коэффициентов ряда Лорана)**.** *Пусть* $r < R$ *— те же, что и выше. Тогда функция* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$

голоморфна в кольце $K_{r,R}(a)$ и для любого $\rho \in (r,R)$ коэффициенты ряда (6.1) *удовлетворяют соотношениям*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.5}$$

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что ряды (6.2), (6.3) сходятся равномерно внутри кольца $K_{r,R}(a)$. Поэтому, согласно первой теореме Вейерштрасса, их суммы

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$$

голоморфны в $K_{r,R}(a)$, а значит и функция $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ голоморфна в этом кольце.

Пусть $\rho \in (r,R)$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\partial U_\rho(a) \Subset K_{r,R}$, то ряды (6.2), (6.3) сходятся равномерно на этой окружности к суммам f_1 и f_2 соответственно. Поскольку в точках $\xi \in \partial U_\rho(a)$ функция $(\xi-a)^{-n-1}$ ограничена[1], то и ряды $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-a)^{j-n-1}$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}(z-a)^{-j-n-1}$ сходятся равномерно на окружности $\partial U_\rho(a)$ к функциям $\frac{f_1(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ и $\frac{f_2(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ соответственно. Почленным интегрированием получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f_1(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f_2(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\partial U_\rho(a)} a_j(z-a)^{j-n-1}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\partial U_\rho(a)} a_{-j}(z-a)^{-j-n-1}d\xi = a_n.$$

(Мы учли, что $\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{d\xi}{(\xi-a)^k} = 0$ при $k \neq -1$, $\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{d\xi}{(\xi-a)} = 2\pi i$.) □

Следствие 12 (Единственность коэффициентов ряда Лорана)**.** *Пусть ряд* (6.1) *сходится в кольце $K_{r_1,r_2}(a)$ к функции $f(z)$. Тогда для любого $\rho \in (r_1,r_2)$ коэффициенты ряда* (6.1) *удовлетворяют равенствам* (6.5).

Доказательство. Из предложения 28 следует, что $K_{r_1,r_2}(a)$ содержится в кольце $K_{r,R}$ сходимости ряда (6.1). Пусть $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$,

[1] $|\xi-a|^{-n-1} = \rho^{-n-1}$, при $\xi \in \partial U_\rho(a)$

$z \in K_{r,R}$. Так как $f(z) = F(z)$ при $z \in K_{r_1,r_2}(a)$, то для любого $\rho \in (r_1, r_2)$ в силу (6.5) при $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{F(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi.$$

□

Доказательство следующего утверждения аналогично приведенному для коэффициентов степенного ряда.

Предложение 30 (Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана)**.** *Пусть* $K_{r,R}(a)$ *— кольцо сходимости ряда* (6.1)*. Для любого* $\rho \in (r, R)$ *положим* $M(\rho) = \max_{\xi \in \partial U_\rho(a)} |f(\xi)|$*. Тогда коэффициенты ряда* (6.1) *удовлетворяют неравенствам Коши:*

$$|a_n| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n}. \tag{6.6}$$

6.2 Разложение голоморфной функции в кольце в ряд Лорана

Теорема 13 (Теорема Лорана)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{O}(K_{r_1,r_2}(a))$*. Тогда:*

1. Числа

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.7}$$

не зависят от $\rho \in (r_1, r_2)$*.*

2. Для любого $z \in K_{r_1,r_2}(a)$ *функция* $f(z)$ *представима сходящимся рядом:* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$*, называемым рядом Лорана функции* f *в кольце* $K_{r_1,r_2}(a)$*. Коэффициенты* a_n*,* $n \in \mathbb{Z}$ *называются коэффициентами Лорана функции* f *в кольце* $K_{r_1,r_2}(a)$*.*

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольные $\rho_1 < \rho_2$ из интервала (r_1, r_2) и $n \in \mathbb{Z}$. Так как функция $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ голоморфна в кольце $K_{r_1,r_2}(a)$, содержащем $\overline{K_{\rho_1,\rho_2}(a)}$, то по интегральной теореме Коши

$$\int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = 0.$$

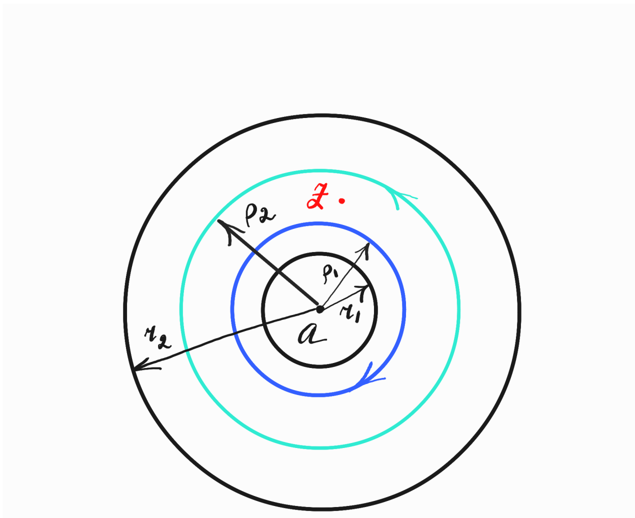


Рис. 6.1:

Поскольку

$$\int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \int_{\partial U_{\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi - \int_{\partial U_{\rho_1}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi,$$

получаем $\int_{\partial U_{\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \int_{\partial U_{\rho_1}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$. (Второй из интегралов берется со знаком "минус", так как внутренняя окружность кольца ориентирована по часовой стрелке, см. рис. 6.1).

2. Зафиксируем $z \in K_{r_1,r_2}(a)$ и выберем ρ_1, ρ_2, удовлетворяющие соотношению

$$r_1 < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < r_2.$$

Так как f непрерывна на компакте $\overline{K_{\rho_1,\rho_2}(a)}$, то $M = \max_{\xi\in\overline{K_{\rho_1,\rho_2}(a)}} |f(\xi)| < +\infty$.

Из интегральной формулы Коши следует, что

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = I_2(z) - I_1(z), \quad \text{где} \\ I_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, \quad I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{\rho_1}(a)} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}. \end{gathered} \tag{6.8}$$

(Интеграл $I_1(z)$ берется со знаком "минус", так как внутренняя окружность ориентирована по часовой стрелке (см. рис.)). Разложим каждый из интегралов $I_2(z)$, $I_1(z)$ в ряд по степеням $z - a$.

Рассмотрим сначала $I_2(z)$. Его мы будем раскладывать в ряд так же, как и в теореме Тейлора. Пусть $\xi \in \partial U_{\rho_2}(a)$. Тогда $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{\rho_2} < 1$. Поэтому подынтегральное выражение в $I_2(z)$ раскладывается в геометрическую прогрессию:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}. \qquad (6.9)$$

Поскольку при $\xi \in \partial U_{\rho_2}(a)$ справедливы оценки

$$\left|\frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\right| \leq \frac{M|z-a|^n}{{\rho_2}^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M|z-a|^n}{{\rho_2}^{n+1}}$ сходится и не зависит от ξ, то ряд (6.9) сходится равномерно относительно параметра $\xi \in \partial U_{\rho_2}(a)$ по признаку Вейерштрасса. Интегрируя почленно ряд (6.9) и учитывая (6.7) при $\rho = \rho_2$, получаем

$$I_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n. \qquad (6.10)$$

Рассмотрим теперь $I_1(z)$. При $\xi \in \partial U_{\rho_1}(a)$ имеем $\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right| = \frac{\rho_1}{|z-a|} < 1$. Поэтому подынтегральное выражение в $I_1(z)$ раскладывается в геометрическую прогрессию:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} = -\frac{f(\xi)}{(z - a)} \frac{1}{1 - \frac{\xi-a}{z-a}} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(\xi-a)^j}{(z - a)^{j+1}}. \qquad (6.11)$$

Так как при $\xi \in \partial U_{\rho_1}(a)$ справедливы оценки

$$\left|\frac{f(\xi)(\xi-a)^j}{(z-a)^{j+1}}\right| \leq \frac{M\rho_1^j}{|z-a|^{j+1}}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

и ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M\rho_1^j}{|z-a|^{j+1}}$ сходится и не зависит от ξ, то ряд (6.11) сходится равномерно относительно параметра $\xi \in \partial U_{\rho_1}(a)$ по признаку Вейерштрасса. Почленное интегрирование ряда (6.11) с учетом (6.7) при $\rho = \rho_1$ дает

$$I_1(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} a_{-j-1}(z-a)^{-j-1} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n. \qquad (6.12)$$

Таким образом, при всех $z \in K_{r_1,r_2}$ функция $f(z)$ раскладывается в сходящийся ряд Лорана:

$$f(z) = I_2(z) - I_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

$\square$

Замечание 8. Из теоремы Лорана и следствия 12 получаем, что функция f, голоморфная в кольце K_{r_1,r_2} раскладывается в этом кольце в ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ единственным образом. При этом коэффициенты a_n, $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют соотношениям (6.7) для любого $\rho \in (r_1, r_2)$.

6.3 Изолированные особые точки

Определение 31. Точка $a \in \mathbb{C}$ называется *изолированной особой точкой (голоморфной) функции* $f(z)$, если $f \in \mathcal{O}(U_\delta^0(a))$ для некоторого $\delta > 0$. Изолированная особая точка функции f называется:

(1) *устранимой*, если существует $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;

(2) *полюсом*, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$;

(3) *существенно особой точкой*, если не существует предела (ни конечного, ни бесконечного) функции $f(z)$ при $z \to a$.

Примеры. Точка $a = 0$ является:

1) устранимой для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$,

2) полюсом для функции $g(z) = \frac{1}{z}$,

3) существенно особой для функции $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Отметим, что проколотая окрестность $U_\delta^0(a)$ является кольцом $K_{0,\delta}(a)$. Из теоремы Лорана следует, что в $U_\delta^0(a)$ функция f представима сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Посмотрим, какой вид имеет этот ряд для каждого типа изолированной особой точки.

6.3.1 Описание устранимых особых точек.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $U_\delta^0(a)$ точки a.

Предложение 31. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) a — устранимая особая точка;

(2) функция $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $U_r^0(a)$;

(3) коэффициенты a_n, $n < 0$ ряда Лорана функции f в кольце $U_\delta^0(a)$ равны нулю;

(4) можно доопределить функцию $f(z)$ в точке a до голоморфной функции в круге $U_\delta(a)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) — очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (3). По условию существует такое $M > 0$, что $|f(z)| \leq M$ при $z \in U_r^0(a)$. Из неравенств Коши (6.6) при $\rho \in (0, r)$ и $k \in \mathbb{N}$ получаем $|a_{-k}| \leq M\rho^k$. Устремляя $\rho \to 0 + 0$, получаем $a_{-k} = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4). По условию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ при $z \in U_\delta^0(a)$. В силу теоремы Коши-Адамара, радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ не меньше δ. Полагая $f(a) = a_0$, получаем, что $f \in \mathcal{O}(U_\delta(a))$ в силу голоморфности суммы степенного ряда в круге сходимости.

(4) $\Rightarrow$ (1) очевидно. $\square$

6.3.2 Описание полюсов.

Предложение 32. *Пусть $f \in \mathcal{O}(U_\delta^0(a))$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Точка a является полюсом функции f.

(2) Существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и функция g, голоморфная в круге $U_\delta(a)$, что $g(a) \neq 0$ и

$$f(z) = (z-a)^{-n} g(z) \quad \textit{при} \quad z \in U_\delta^0(a). \tag{6.13}$$

(3) Главная часть ряда Лорана функции f с центром в точке a содержит конечное (но ненулевое число) отличных от нуля членов. При этом разложение функции f в ряд Лорана на множестве $U_\delta^0(a)$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k, \tag{6.14}$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$, причем $a_{-n} \neq 0$.

Число n в представлениях (6.13), (6.14) *одно и то же.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. Тогда существует такое $\delta_1 \le \delta$, что $f(z) \ne 0$ при $z \in U^0_{\delta_1}(a)$. Рассмотрим

$$\phi(z) = \frac{1}{f(z)}, \quad z \in U^0_{\delta_1}(a).$$

Тогда $\phi \in \mathcal{O}(U^0_{\delta_1}(a))$ и $\lim_{z\to a} \phi(z) = 0$. Положим $\phi(a) = 0$. Из предыдущего предложения следует, что $\phi \in \mathcal{O}(U_{\delta_1}(a))$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — порядок нуля функции ϕ в точке a. В силу предложения 27, справедливо представление $\phi(z) = (z-a)^n h(z)$, где функция $h \in \mathcal{O}(U_{\delta_1}(a))$, $h(a) \ne 0$. Так как функция ϕ не обращается в нуль в точках из проколотой окрестности $U^0_{\delta_1}(a)$, то функция h не имеет нулей в целом круге $U_{\delta_1}(a)$. Пусть $g(z) = \frac{1}{h(z)}$. Тогда $g(z)$ также как и $h(z)$ голоморфна в целой окрестности $U_{\delta_1}(a)$ и не имеет в ней нулей. Тем самым в проколотой окрестности $U^0_{\delta_1}(a)$ имеем $\phi(z) = \frac{(z-a)^n}{g(z)}$, $f(z) = (z-a)^{-n} g(z)$. Так как $g(z) = f(z)(z-a)^n$ при $z \in U^0_{\delta_1}(a)$, то доопределив ее этим же равенством в точках $z \in U^0_{\delta}(a)$, получим функцию, удовлетворяющую (6.13).

(2) $\Rightarrow$ (3). Разложим функцию g в ряд Тейлора в круге $U_\delta(a)$: $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$, где $b_0 = g(a) \ne 0$. Тогда в проколотой окрестности $U^0_\delta(a)$ имеем

$$f(z) = (z-a)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k = \frac{b_0}{(z-a)^n} + \frac{b_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots.$$

Полагая $a_j = b_{j+n}$ при $j \ge -n$, $a_j = 0$ при $j < -n$, убеждаемся в справедливости (6.14).

(3) $\Rightarrow$ (1). Из (6.14) при $z \in U^0_\delta(a)$ имеем

$$f(z) = (z-a)^{-n}(a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots).$$

Пусть $g(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots$, $z \in U_\delta(a)$. Так как $g(a) = a_{-n} \ne 0$, то

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)}{(z-a)^n} = \infty.$$

$\square$

Определение 32. Пусть точка a является полюсом функции f. Число $n \in \mathbb{N}$ из представления (6.14) называется *порядком полюса* функции f в точке a. Полюса первого порядка называются *простыми*.

Замечание 9. Из представления (6.13) следует, что порядок полюса функции f в точке a равен порядку нуля в точке a функции $h(z) = \frac{1}{f(z)}$, доопределенной нулем в этой точке.

Замечание 10. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $U^0_\delta(a)$ точки a и $f \not\equiv 0$. Из приведенных выше рассуждений следует, что изолированная особая точка a функции f является устранимой или полюсом для $f \iff$ существует такие $g \in \mathcal{O}(U_\delta(a))$ и $m \in \mathbb{Z}$, что $g(a) \neq 0$ и

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \quad z \in U_\delta(a).$$

6.3.3 Поведение функции в окрестности существенно особой точки. Теорема Сохоцкого.

Из предложений 31 и 32 вытекает

Следствие 13. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $U^0_\delta(a)$ точки a. Тогда a является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ее ряда Лорана в $U^0_\delta(a)$ содержит бесконечно много ненулевых членов.*

Теорема 14 (Теорема Сохоцкого)**.** *Пусть точка a вляется существенно особой для функции f. Тогда для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует такая последовательность точек z_n, сходящаяся к a, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Доказательство. Пусть $A = \infty$. Так как точка a не является устранимой для $f(z)$, то в силу предложения 31, функция f не является ограниченной ни в какой проколотой окрестности точки a. Поэтому существует последовательность $z_n \to a$ для которой $f(z_n) \to \infty$.

Рассмотрим случай $A \in \mathbb{C}$. Если в любой проколотой окрестности $U^0_{\frac{1}{n}}(a)$ существует такая точка z_n, что $f(z_n) = A$, то последовательность $\{f(z_n)\}$ очевидно сходится к A. Иначе существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $f(z) \neq A$ для всех $z \in U^0_{\frac{1}{N}}(a)$. Возьмем такое $\delta \leq \frac{1}{N}$, что $f \in \mathcal{O}(U^0_\delta(a))$ и рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}.$$

По построению $g \in \mathcal{O}(U^0_\delta(a))$ и $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$. Если бы точка a была устранимой, или полюсом для функции $g(z)$, то она была бы устранимой, или полюсом для $f(z)$ ($\lim_{z\to a} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to a} g(z) = 0$, иначе точка a была бы устранимой для $f(z)$). Следовательно, точка a является существенно особой для $g(z)$ и, рассуждая как выше, получаем, что существует такая последовательность $z_n \to a$, что $g(z_n) \to \infty$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A + \left(\lim_{n\to\infty} g(z_n)\right)^{-1} = A,$$

что и требовалось доказать. □

Следующее утверждение приведем без доказательства.

Теорема 15 (Большая теорема Пикара)**.** *Пусть точка a является существенно особой для функции f. Тогда в любой проколотой окрестности точки a функция f принимает все комплексные значения, за исключением, быть может, одного, бесконечное число раз.*

6.4 Бесконечность, как изолированная особая точка.

Определение 33. Точка $a = \infty$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует такое $R > 0$, что $f \in \mathcal{O}(U_R^0(\infty))$[2]. Тип изолированной особой точки $a = \infty$ определяется так же, как и в определении 31.

Таким образом, точка $a = \infty$ является *устранимой*, *полюсом*, или *существенно особой* для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда точка $\zeta = 0$ является соответственно устранимой, полюсом, или существенно особой для функции $g(\zeta) := f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$.

Пусть f голоморфна в проколотой окрестности бесконечности $U_R^0(\infty)$ и ее разложение в этом кольце в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \tag{6.15}$$

Тогда разложение функции $g(\zeta)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности нуля $U^0_{\frac{1}{R}}(0)$ имеет вид

$$g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} \zeta^n.$$

[2]Напомним, что $U_R^0(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.

Перенесем результаты, характеризующие тип особой точки $b = 0$ для функции $g(\zeta)$ в терминах ряда Лорана на случай $a = \infty$ для функции $f(z)$:

Предложение 33. *Пусть f голоморфна в проколотой окрестности бесконечности $U_R^0(\infty)$ и ее разложение в этом кольце в ряд Лорана имеет вид* (6.15). *Тогда $a = \infty$ является*

(1) устранимой для функции $f \iff a_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(2) полюсом функции $f \iff$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $a_n \neq 0$, но $a_k = 0$ при $k > n$ (число n называется порядком полюса в ∞);

(3) существенно особой точкой функции $f \iff$ существует бесконечно много натуральных n, для которых $a_n \neq 0$.

В силу этих результатов естественно дать следующее

Определение 34. Пусть f голоморфна в проколотой окрестности бесконечности $U_R^0(\infty)$ и ее разложение в этом кольце в ряд Лорана имеет вид (6.15). В проколотой окрестности бесконечности *правильной частью ряда Лорана функции f* называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n,$$

а его *главной частью* — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Глава 7

Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов

7.1 Понятие вычета, теорема Коши о вычетах, формулы для вычисления вычетов.

Определение 35. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $U^0_\delta(a)$ точки a. *Вычетом функции f в точке a* называется число

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r} f(\xi)d\xi, \quad r \in (0,\delta) \tag{7.1}$$

(так как $f \in \mathcal{O}(\overline{K_{r_1,r_2}(a)})$ для любых $0 < r_1 < r_2 < \delta$, то в силу интегральной теоремы Коши $\int_{|\xi-a|=r_1} f(\xi)d\xi = \int_{|\xi-a|=r_2} f(\xi)d\xi$, поэтому интеграл (7.1) не зависит от r).

Теорема 16 (Теорема Коши о вычетах)**.** *Пусть D — область с простой границей и существует такая область $G \Supset D$ и такой конечный набор точек a_1, …, $a_n \in D$, что функция $f \in \mathcal{O}(G \setminus \cup_{j=1}^n a_j)$. Тогда*

$$\int_{\partial D} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{a_j} f. \tag{7.2}$$

Доказательство. Возьмем такое $\delta > 0$, что круги $U_\delta(a_j) \Subset D$, $1 \le j \le n$. Пусть

$$D_\delta = D \setminus \cup_{j=1}^n \overline{U_\delta(a_j)}.$$

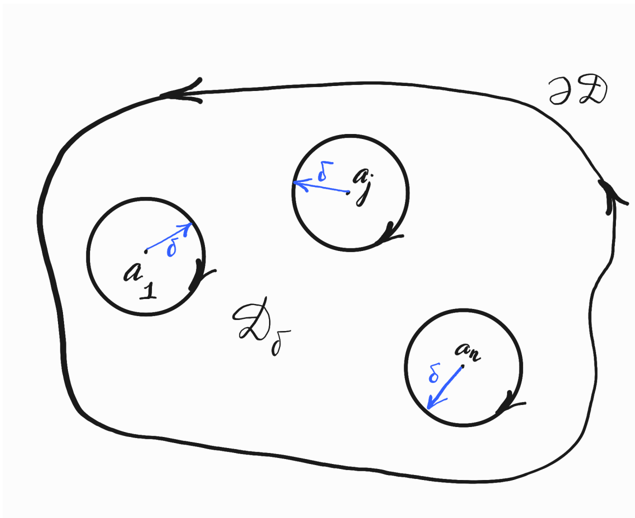


Рис. 7.1:

Так как $\partial D_\delta = \partial D + \cup_{j=1}^{n}(\partial U_\delta(a_j))^-$ (см. рис. 7.1) и $f \in \mathcal{O}(\overline{D_\delta})$, то из интегральной теоремы Коши имеем

$$0 = \int_{\partial D_\delta} f(\xi)d\xi = \int_{\partial D} f(\xi)d\xi - \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial U_\delta(a_j)} f(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\partial D} f(\xi)d\xi - 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{a_j} f.$$

□

7.1.1 Вычет в терминах ряда Лорана, формулы для вычисления вычетов

Предложение 34. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $U_\delta^0(a)$ точки a и ее разложение в ряд Лорана в этой окрестности имеет вид*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Тогда $\operatorname{res}_a f = a_{-1}$.

Доказательство. Утверждение следует из формулы (6.7) для коэффициентов ряда Лорана при $n = -1$. □

Из предыдущего предположения и описания изолированной особой точки вытекает

Следствие 14. *Если $a \in \mathbb{C}$ — устранимая особая точка функции f, то* $\operatorname{res}_a f = 0$.

Предложение 35 (Формулы для вычисления вычетов в полюсе)**.** *Пусть точка a является полюсом порядка n функции $f \in \mathcal{O}(U_\delta^0(a))$. Тогда:*

(1) если a — простой полюс, то

$$res_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z); \tag{7.3}$$

(2) если $n > 1$, то

$$res_a f = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left((z-a)^n f(z)\right)^{(n-1)}. \tag{7.4}$$

Доказательство. (1) По условию $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$. Следовательно, $a_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

(2) По условию $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-a)^k$. Следовательно, функция $h(z) = f(z)(z-a)^n$ продолжается до голоморфной в круге $U_\delta(a)$ и ее разложение в ряд Тейлора в этом круге имеет вид

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k = a_{-n} + \dots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z-a)^{n+k}.$$

Поэтому $a_{-1} = b_{n-1} = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$. □

Следующее утверждение очень часто используется для нахождения вычета в простом полюсе.

Предложение 36. *Пусть функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны в круге $U_\delta(a)$, причем $\phi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. Тогда функция $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$ имеет простой полюс в точке a и*

$$\operatorname{res}_a f = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}.$$

Доказательство. Так как $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то $\psi(z) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $U_r^0(a)$, $r \in (0, \delta]$. Поскольку

$$\lim_{z \to a} (z-a) \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to a} \phi(z) \left(\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a} \right)^{-1} = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)} \neq 0,$$

точка a является устранимой для функции $g(z) = (z-a)\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$. Доопределив $g(a) = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}$, получим, что $g \in \mathcal{O}(U_r(a))$, $g(a) \neq 0$. Следовательно, $f(z) = (z-a)^{-1} g(z)$ при $z \in U_r^0(a)$. Тем самым точка a является простым полюсом для f и $\operatorname{res}_a f = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}$. □

7.2 Вычет в бесконечности

Пусть $f \in \mathcal{O}(U_R(\infty))$.

Определение 36. *Вычетом функции f в бесконечности* называется число

$$\operatorname{res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho^-} f(\xi) d\xi, \quad \rho > R \tag{7.5}$$

где интеграл берется по окружности $\gamma_\rho = \{|\xi - a| = \rho\}$, проходимой *по часовой стрелке* (в силу интегральной теоремы Коши, интеграл в (7.5) не зависит от $\rho > R$).

Если ряд Лорана функции f в окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad |z| > R,$$

то, из формул (6.7) при $n = -1$ получаем

$$\operatorname{res}_\infty f = -a_{-1}.$$

Замечание 11. Отметим, что если точка $a = \infty$ является устранимой для f, то $\operatorname{res}_\infty f$ не обязательно равен нулю, например $\operatorname{res}_\infty \frac{1}{z} = -1$.

Теорема 17 (Теорема о полной сумме вычетов)**.** *Пусть функция f голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа точек $\{a_j\}$, $1 \leq j \leq n$. Тогда*

$$\operatorname{res}_\infty f + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{a_j} f = 0.$$

Доказательство. Пусть $\rho > R = \max_{1 \le j \le n} |a_j|$. Применяя к кругу $U_\rho(0)$ теорему Коши о вычетах, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(0)} f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{a_j} f.$$

С другой стороны, $f \in \mathcal{O}(U_R(\infty))$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(0)} f(\xi) d\xi = -\operatorname{res}_\infty f(\xi).$$

□

7.3 Применение теории вычетов к вычислению вещественных интегралов

1. Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция от x, y, отличная от нуля на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Тогда функция $R(\cos t, \sin t)$ непрерывна, следовательно, интегрируема на отрезке $[0, 2\pi]$. Покажем, как вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt, \tag{7.6}$$

применяя теорию вычетов. Сделаем в (7.6) замену $\xi = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Имеем:

$$\cos t = \frac{\xi + \frac{1}{\xi}}{2}, \quad \sin t = \frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{2i}, \quad dt = \frac{d\xi}{i\xi}.$$

Таким образом, вычисление интеграла (7.6) сводится к вычислению интеграла по единичной окружности от рациональной функции.

$$I_1 = \int_{|\xi|=1} R\left(\frac{\xi + \frac{1}{\xi}}{2}, \frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{2i}\right) \frac{d\xi}{i\xi}.$$

2. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ — такие многочлены, что $Q(x)$ не имеет нулей при действительных x и $\deg Q \ge \deg P + 2$. Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx. \tag{7.7}$$

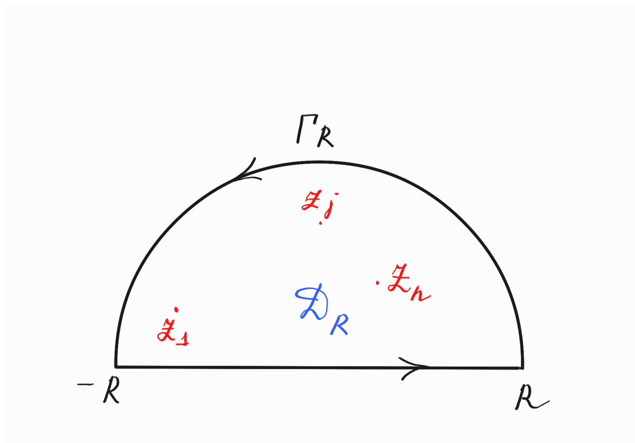


Рис. 7.2:

Так как $\deg Q \geq \deg P + 2$, то существует такое $M > 0$, что для достаточно больших $|z|$ справедлива оценка

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Поэтому, в частности, интеграл (7.7) сходится. Пусть $z_1, \dots, z_l$ — все нули функции $Q(z)$, лежащие в верхней полуплоскости и $R > r_0 = \max_{1\leq j\leq l} |z_j|$. Рассмотрим область $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$. Ее граница ∂D_R состоит из двух частей: отрезка $[-R, R]$ действительной прямой и верхней полуокружности $\Gamma_R = \{\xi = Re^{it}, t \in [0, \pi]\}$, проходимой против часовой стрелки (см. рис. 7.2). По теореме Коши о вычетах

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \\ = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{res}_{z_j} \frac{P(z)}{Q(z)}.\end{aligned} \tag{7.8}$$

Устремим $R \to +\infty$. Тогда $\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$,

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz\right| \leq \frac{M}{R^2} \pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0.$$

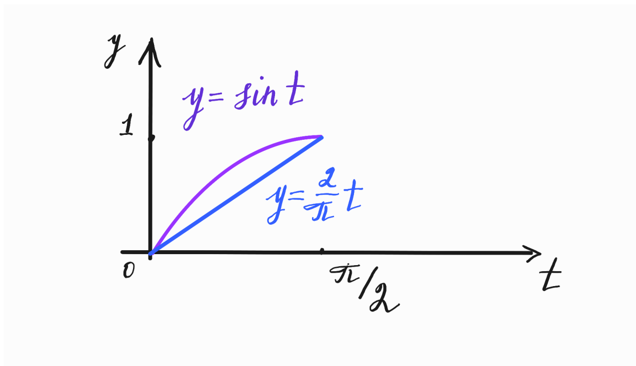


Рис. 7.3:

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{res}_{z_j} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

7.3.1 Лемма Жордана, вычисление преобразования Фурье от рациональной функции.

При вычислении некоторых видов интегралов бывает очень полезна

Лемма 2 (Лемма Жордана)**.** *Пусть функция f непрерывна на множестве*

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0, \operatorname{Im} z \geq 0\},$$

причем $\lim_{z\to\infty, z\in E} f(z) = 0$. Рассмотрим при $R > R_0$ верхнюю полуокружность $\Gamma_R = \{\xi(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi]\}$. Тогда для любого $a > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi = 0.$$

Доказательство. Для любого $R > R_0$ положим $M_R = \max_{\xi\in\Gamma_R} |f(\xi)|$. По условию $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$. Так как

$$\int_{\Gamma_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^{\pi} e^{iaR\cos t - aR\sin t} f(Re^{it}) iRe^{it} dt$$

и при $t \in [0,\pi]$ справедливо неравенство

$$\left|e^{iaR\cos t - aR\sin t} f(Re^{it}) iRe^{it}\right| \leq M_R R e^{-aR\sin t},$$

то

$$I(R) := \left|\int_{\Gamma_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi\right| \leq \int_0^{\pi} M_R R e^{-aR\sin t} dt = 2M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t} dt. \tag{7.9}$$

Для оценки интеграла в правой части (7.9), воспользуемся неравенством $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (см. рис. 7.3). Следовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR}{\pi} t} dt = \frac{\pi}{2aR}\left(1 - e^{-aR}\right),$$

$$I(R) \leq \frac{\pi M_R}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

□

3. **Вычисление преобразования Фурье от рациональной функции.** Пусть $a > 0$ и $P(x)$, $Q(x)$ — такие многочлены, что $Q(x)$ не имеет нулей при действительных x и $\deg Q > \deg P$. Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} P(x)}{Q(x)} dx := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax) P(x)}{Q(x)} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax) P(x)}{Q(x)} dx. \tag{7.10}$$

Поскольку $\deg Q > \deg P$, существует такое $A > 0$, что функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ монотонна на промежутках $(-\infty, -A]$, $[A, +\infty)$, причем $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. Учитывая, что функции $\cos ax$, $\sin ax$ имеют ограниченную первообразную, получаем, что оба интеграла в правой части (7.10) сходятся по признаку Дирихле, следовательно, существует и интеграл в левой части (7.10).

Пусть, как и раньше, $z_1, \ldots, z_l$ — все нули функции $Q(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, $R > R_0 = \max_{1\leq j\leq l} |z_j|$. $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$, $\Gamma_R = \{\xi = Re^{it}, t \in [0,\pi]\}$. По теореме Коши о вычетах

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{\Gamma_R} e^{iaz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{res}_{z_j} e^{iaz} \frac{P(z)}{Q(z)}. \tag{7.11}$$

Устремим $R \to +\infty$. Тогда

$$\int_{-R}^{R} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Так как $\deg Q > \deg P$, то $\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$. Поэтому к функции $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ применима лемма Жордана, следовательно

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{res}_{z_j} e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}.$$

7.3.2 Вычисление интегралов в смысле главного значения с помощью теории вычетов.

Пусть функция $\phi(x)$ определена и непрерывна всюду на вещественной прямой, за исключением, быть может, конечного числа точек a_j, $1 \le j \le n$. Тогда для достаточно больших $R > 0$ и достаточно малых положительных $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ интервалы $(a_1-\epsilon_1, a_1+\epsilon_1), \dots, (a_n-\epsilon_n, a_n+\epsilon_n)$ попарно не пересекаются и содержатся в интервале $(-R, R)$. Положим

$$E(R, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = [-R, R] \setminus \cup_{j=1}^{n} (a_j - \epsilon_j, a_j + \epsilon_j). \tag{7.12}$$

Определение 37. Интегралом в смысле главного значения от функции $\phi(x)$ называется предел

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \lim_{R\to+\infty, \epsilon_1,\dots,\epsilon_n \to 0+0} \int_{E(R,\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)} \phi(x)dx,$$

если он существует.

Замечание 12. Отметим, что если $\phi(x)$ — произвольная нечетная функция, непрерывная при $x \in \mathbb{R} \setminus 0$, то $v.p \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 0$.

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\epsilon > 0$. Через $\gamma_{a,\epsilon}$ обозначим верхнюю полуокружность радиуса ϵ с центром в точке a, проходимую против часовой стрелки:

$$\gamma_{a,\epsilon}(t) = a + \epsilon e^{it}, t \in [0, \pi].$$

Докажем вспомогательное утверждение:

Лемма 3. *Если функция f имеет в точке a простой полюс, то*

$$\lim_{\epsilon\to 0+0}\int_{\gamma_{a,\epsilon}} f(\xi)d\xi = \pi i \operatorname{res}_a f.$$

Доказательство. Пусть $a_{-1} = \operatorname{res}_a f$. По условию, существуют такие $\delta > 0$ и $g \in \mathcal{O}(U_\delta(a))$, что

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + g(z) \quad \text{при} \quad z \in U_\delta(a).$$

Поскольку функция $g \in C(U_\delta(a))$, существует $M = \max_{z\in\overline{U_{\frac{\delta}{2}}(a)}} |f(z)|$. Поэтому

$$\left|\int_{\gamma_{a,\epsilon}} g(\xi)d\xi\right| \le M\,|\gamma_{a,\epsilon}| = \pi M\epsilon \to 0$$

при $\epsilon \to 0+0$. Также

$$\int_{\gamma_{a,\epsilon}} \frac{a_{-1}}{\xi-a}d\xi = \int_0^\pi \frac{a_{-1}}{\epsilon e^{it}}(\epsilon e^{it})'dt = \int_0^\pi ia_{-1}dt = \pi i a_{-1},$$

независимо от ϵ. Поэтому $\lim_{\epsilon\to 0+0}\int_{\gamma_{a,\epsilon}} f(\xi)d\xi = a_{-1}$.

□

Предложение 37. *Пусть область G содержит замыкание $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \ge 0\}$ верхней полуплоскости. Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную всюду в G за исключением, быть может, конечного числа особых точек $b_1, \dots, b_m$, лежащих в верхней полуплоскости и конечного числа точек $a_1 < \dots < a_n$ действительной прямой, причем каждая из точек $a_1, \dots, a_n$ является простым полюсом для f. Допустим также, что*[1] $\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$. *Тогда*

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\operatorname{res}_{b_j} f(z) + \pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{a_k} f(z). \tag{7.13}$$

[1]здесь, как и выше, $\Gamma_R = \{\xi = Re^{it}, t\in[0,\pi]\}$ — верхняя полуокружность радиуса R с центром в нуле, проходимая против часовой стрелки

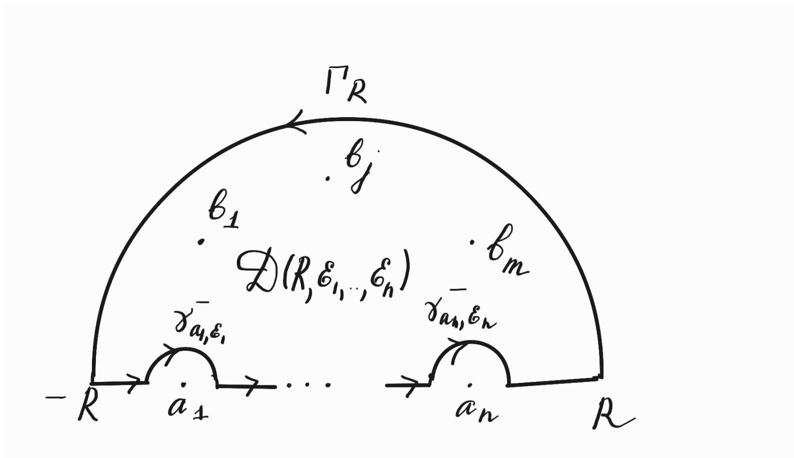


Рис. 7.4:

Доказательство. Пусть, как и раньше, число R такое большое, а числа ϵ_1, ..., ϵ_n такие маленькие, что интервалы $(a_1 - \epsilon_1, a_1 + \epsilon_1)$, ..., $(a_n - \epsilon_n, a_n + \epsilon_n)$ попарно не пересекаются и содержатся в интервале $(-R, R)$. Рассмотрим область

$$D(R, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < R, |z - a_k| > \epsilon_k, 1 \le k \le n\}.$$

Ее граница $\partial D(R, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ состоит из множества $E(R, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ отрезков, ориентированных по возрастанию параметра x, кривых $\gamma^-_{a_k,\epsilon_k}$, $1 \le k \le n$, проходимых по часовой стрелке и кривой Γ_R (см. рис. 7.4)

Поэтому

$$\int_{E(R,\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)} f(\xi)d\xi = \int_{\partial D(R,\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)} f(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{a_k,\epsilon_k}} f(\xi)d\xi - \int_{\Gamma_R} f(\xi)d\xi. \tag{7.14}$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{\partial D(R,\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}_{b_j} f(z).$$

По условию $\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$. В силу леммы 3,

$$\lim_{\epsilon_k\to 0+0} \int_{\gamma_{a_k,\epsilon_k}} f(\xi)d\xi = \pi i \operatorname{res}_{a_k} f, \quad 1 \le k \le n.$$

Поэтому, устремив в (7.14) параметры $R \to +\infty$, $\epsilon_k \to 0+0$, при $1 \le k \le n$, получаем требуемое равенство (7.13). $\square$

Пример. Вычислить $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Так как подынтегральная функция является четной, а сам интеграл сходится по признаку Дирихле, то

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2I.$$

Рассмотрим $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$. Во-первых, в силу леммы Жордана,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi = 0.$$

Во-вторых, функция $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus 0$, причем точка $z = 0$ является ее простым полюсом и

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} e^{iz} = 1.$$

Поэтому из равенства (7.13) получаем $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$, следовательно

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Глава 8

Логарифмический вычет. Изменение аргумента функции вдоль кривой и его свойства. Принцип аргумента. Теорема Руше.

8.1 Теорема о логарифмическом вычете, лемма о логарифмическом вычете.

Определение 38. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и не имеет нулей в некоторой проколотой окрестности $U_\delta^0(a)$ точки a. Тогда в этой окрестности определено выражение $\frac{f'(z)}{f(z)}$, которое называется *логарифмической производной функции* $f(z)$. Число $\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)}$ называется *логарифмическим вычетом функции* $f(z)$ *в точке* a.

Лемма 4 (Лемма о логарифмическом вычете)**.** *Если точка a является нулем порядка n функции $f(z)$, то $\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = n$. Если же точка a является полюсом порядка n функции $f(z)$, то $\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = -n$.*

Доказательство. По условию, существуют такая окрестность $U_\delta(a)$ и функция $g(z)$, голоморфная в этой окрестности и не имеющая в ней нулей, что

$$f(z) = (z-a)^k g(z), \quad \text{при} \quad z \in U^0_\delta(a),$$

где либо $k = n$, если a является нулем функции f, либо $k = -n$, если a является полюсом функции f. Следовательно

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'(z)}{(z-a)^k g(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Функция $\frac{g'(z)}{g(z)}$ голоморфна в окрестности $U_\delta(a)$, поэтому главная часть ряда Лорана функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в проколотой окрестности $U^0_\delta(a)$ равна $\frac{k}{z-a}$ и $\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = k$. $\square$

Определение 39. Функция $f(z)$ называется *мероморфной* в области G (обозначение $f \in \mathcal{M}(G)$), если все ее особые точки в этой области являются полюсами.

Определение 40. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в области G и имеет в этой области не более чем конечное число нулей и полюсов. Тогда число $N(f, G)$, равное сумме порядков всех нулей функции f в области G, называется *числом нулей функции f в области G с учетом кратности*, а число $P(f, G)$, равное сумме порядков всех полюсов функции f в области G, называется *числом полюсов функции f в области G с учетом кратности.*

Теорема 18 (Теорема о логарифмическом вычете)**.** *Пусть D — область с простой границей, функция $f(z)$ мероморфна в некоторой области $G \Supset D$ и имеет в области G не более чем конечное число нулей и полюсов, причем все эти нули и полюсы содержатся в области D. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = N(f, D) - P(f, D). \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — все нули функции f в области G порядков $n_1, \ldots, n_k$ соответственно, а $b_1, \ldots, b_l$ — все полюса функции f в области G порядков $m_1, \ldots, m_l$ соответственно. Тогда функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ голоморфна в $G \setminus \{\left(\cup_{j=1}^k a_j\right) \cup \left(\cup_{s=1}^l b_s\right)\}$. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{a_j} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{s=1}^l \operatorname{res}_{b_s} \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Осталось заметить, что в силу леммы о логарифмическом вычете

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{res}_{a_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = N(f, D), \quad \sum_{s=1}^{l} \mathrm{res}_{b_s} \frac{f'(z)}{f(z)} = -P(f, D).$$

$\square$

8.2 Изменение аргумента вдоль кривой. Изменение аргумента функции вдоль кривой.

Напомним, что для любого числа $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ справедливо полярное представление $z = |z|e^{i \arg z}$, где $\arg z \in (-\pi, \pi]$ — главное значение аргумента числа z. Функция $\arg z$ разрывна в точках, лежащих на отрицательном луче оси x. Более того (это будет показано в следствии 16) на всем множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ нельзя непрерывно задать полярный угол — то есть действительную функцию $\theta(z)$, удовлетворяющую равенству

$$z = |z|e^{i\theta(z)}. \tag{8.2}$$

Заметим, однако, что локально такая функция существует. Действительно, рассмотрим правую, верхнюю, левую и нижнюю полуплоскости

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}, \quad \Pi_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \\ \Pi_3 &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}, \quad \Pi_4 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Они покрывают все множество $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Положим

$$\begin{aligned} \arg_1(z) &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \arg_2(z) = \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}, \\ \arg_3(z) &= \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \arg_4(z) = \pi + \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Тогда в каждой полуплоскости Π_j функция $\theta(z) = \arg_j(z)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению (8.2).

Ниже в предложении 38 мы покажем, что на любой непрерывной кривой γ: $[a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ можно задать полярный угол, как непрерывную функцию параметра $t \in [a, b]$. Докажем сначала вспомогательное утверждение:

Лемма 5. *Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — непрерывная кривая. Тогда существует такое положительное число d, что для любых точек $t', t'' \in [a,b]$, удовлетворяющих соотношению $|t' - t''| \le d$ найдется полуплоскость Π_j, $j \in \{1,2,3,4\}$ (см.(8.3)), содержащая одновременно точки $\gamma(t')$ и $\gamma(t'')$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие точки $t'_n, t''_n \in [a,b]$, что что $|t'_n - t''_n| \le \frac{1}{n}$, но $\gamma(t'_n)$ и $\gamma(t''_n)$ не лежат одновременно ни в одной из плоскостей Π_j. Так как $[a,b]$ — компакт, то существует подпоследовательность $\{t'_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой $t_0 \in [a,b]$. Но тогда и $\lim_{k\to\infty} t''_{n_k} = t_0$. Так как $\gamma(t_0) \ne 0$, то существует полуплоскость $\Pi_{j_0} \ni \gamma(t_0)$. В силу непрерывности кривой γ, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \gamma(t'_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \gamma(t''_{n_k}) = \gamma(t_0),$$

поэтому для достаточно больших k точки $\gamma(t'_{n_k}), \gamma(t''_{n_k})$ содержатся в Π_{j_0}, что противоречит нашему предположению. □

Предложение 38. *Пусть γ: $[a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — непрерывная кривая. Тогда:*

1. Существует такая действительная функция $\Theta \in C[a,b]$, что

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\Theta(t)}, \quad t \in [a,b]. \tag{8.5}$$

2. Она единственна с точностью до прибавления $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

3. Если γ — непрерывно дифференцируемая кривая (т.е. функции $\operatorname{Re}\gamma(t)$ и $\operatorname{Im}\gamma(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$), то и непрерывная функция Θ, удовлетворяющая (8.5), непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. 1. Пусть Π_j — полуплоскости, заданные в (8.3), а $\arg_j$ — функции, определенные в (8.4), $1 \le j \le 4$. Если кривая γ лежит целиком в полуплоскости Π_j, то функция $\Theta(t) = \arg_j(\gamma(t))$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяет (8.5).

Рассмотрим теперь случай, когда кривая γ не лежит целиком ни в одной из вышеперечисленных плоскостей. Пусть число $d > 0$ удовлетворяет заключению леммы 5. Возьмем разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$ на участки длины меньше d. Тогда при $1 \le k \le n$ каждая из кривых $\gamma_k(t) = \gamma(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$ содержится целиком в одной

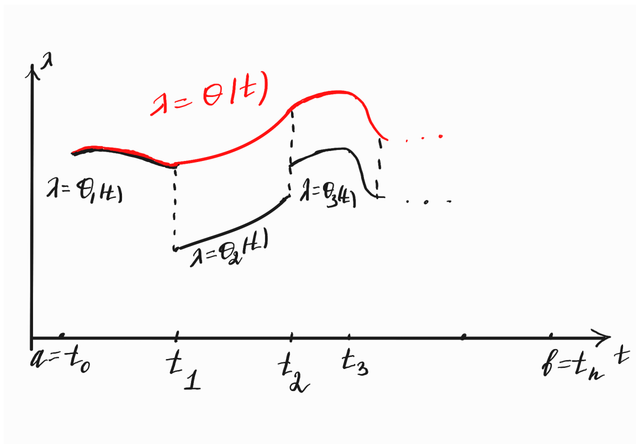


Рис. 8.1:

из Π_j, поэтому существуют функции $\theta_k \in C[t_{k-1}, t_k]$, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta_k(t)}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k]. \tag{8.6}$$

Пусть $1 \le k \le n-1$. Так как точка t_k принадлежит участкам $[t_{k-1}, t_k]$ и $[t_k, t_{k+1}]$, то

$$e^{i\theta_k(t_k)} = e^{i\theta_{k+1}(t_k)} = \frac{\gamma(t_k)}{|\gamma(t_k)|},$$

следовательно, $\theta_{k+1}(t_k) - \theta_k(t_k) = 2\pi m_k$ для некоторого $m_k \in \mathbb{Z}$.

Поэтому функция

$$\Theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x), x \in [t_0, t_1], \\ \theta_2(x) - 2\pi m_1, x \in (t_1, t_2], \\ \dots \\ \theta_n(x) - 2\pi(m_1 + \dots + m_{n-1}), x \in (t_n - 1, t_n] \end{cases}$$

непрерывна на всем отрезке $[a, b]$ и на каждом участке $[t_{k-1}, t_k]$ удовлетворяет равенству $e^{i\Theta(t)} = e^{i\theta_k(t)}$ (см. рис. 8.1), следовательно, $\Theta(x)$ удовлетворяет соотношению (8.5).

2. Пусть функции Θ_1 и Θ_2 непрерывны на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют соотношению (8.5). Тогда

$$e^{i\Theta_1(t)} = e^{i\Theta_2(t)} = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}, \quad t \in [a, b].$$

Поэтому непрерывная функция $\eta(t) = \Theta_2(t) - \Theta_1(t)$ может принимать только значения, кратные 2π. Если бы функция $\eta(t)$ была непостоянной на отрезке $[a, b]$, то нашлись бы такие точки $t_1, t_2 \in [a, b]$, что $\eta(t_1) \neq \eta(t_2)$. Но тогда по теореме о промежуточном значении, функция $\eta(t)$ должна была бы принимать все значения между $\eta(t_1)$ и $\eta(t_2)$, что невозможно. Отсюда существует такое $m \in \mathbb{Z}$, что $\Theta_2(t) - \Theta_1(t) = 2\pi m$ для всех $t \in [a, b]$.

3. Пусть функция $\Theta(t)$ непрерывна и удовлетворяет (8.5). Возьмем число d из леммы 5. Достаточно показать, что функция $\Theta(t)$ непрерывно дифференцируема на любом отрезке $[t_1, t_2] \subset [a, b]$, для которого $t_2 - t_1 \leq d$. В силу леммы 5 найдется такое $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ что $\gamma(t) \in \Pi_j$ при $t \in [t_1, t_2]$. Поскольку функция $\arg_j(z)$ является непрерывно дифференцируемой в полуплоскости Π_j, то и суперпозиция $\widetilde{\Theta}(t) = \arg_j(\gamma(t))$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$. Рассуждая, как в 1., 2., последовательно получаем, что на отрезке $[t_1, t_2]$ функция $\widetilde{\Theta}(t)$ удовлетворяет соотношению (8.5) и $\widetilde{\Theta}(t) - \Theta(t) = 2\pi m$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\Theta \in C^1[t_1, t_2]$. □

Определение 41. Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — непрерывная кривая, $\Theta(t)$ — функция из предложения 38. Величина

$$\Delta_\gamma \arg z = \Theta(b) - \Theta(a)$$

называется *изменением аргумента z вдоль кривой γ.*

Следствие 15. *Если непрерывная замкнутая кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ целиком лежит в правой полуплоскости Π_1, то $\Delta_\gamma \arg z = 0$.*

Доказательство. Действительно, функция $\arg_1(z)$ из (8.4) непрерывна вдоль γ, поэтому функция $\Theta(t) = \arg_1(\gamma(t))$ удовлетворяет условиям предложения 38. Так как кривая γ замкнута, то $\gamma(b) = \gamma(a)$, следовательно

$$\Delta_\gamma \arg z = \Theta(b) - \Theta(a) = 0.$$

□

Предложение 39 (Свойства $\Delta_\gamma \arg z$)**.** *Пусть γ: $[a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — непрерывная кривая. Тогда:*

а) $\Delta_{\gamma^-} \arg z = -\Delta_\gamma \arg z$;

б) если $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (то есть существует такое $c \in (a, b)$, что $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ при $t \in [a, c]$, $\gamma_2(t) = \gamma(t)$ при $t \in [c, b]$), то

$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z;$$

в) если γ — непрерывно дифференцируемая замкнутая кривая, то

$$\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi} = i\Delta_\gamma \arg z = 2\pi i n, \tag{8.7}$$

где n — число обходов кривой γ вокруг нуля с учетом направления.

Доказательство. Пусть $\Theta(t)$ — функция из равенства (8.5).

а) По определению $\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$, Поэтому функция $\Theta^-(t) = \Theta(b + a - t)$ непрерывна и удовлетворяет соотношению

$$\gamma^-(t) = |\gamma^-(t)| e^{i\Theta^-(t)}, \quad t \in [a, b].$$

Следовательно,

$$\Delta_{\gamma^-} \arg z = \Theta^-(b) - \Theta^-(a) = \Theta(a) - \Theta(b) = -\Delta_\gamma \arg z.$$

б) По условию $\Delta_{\gamma_1} \arg z = \Theta(c) - \Theta(a)$, $\Delta_{\gamma_2} \arg z = \Theta(b) - \Theta(c)$. Поэтому

$$\Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z = \Theta(b) - \Theta(a) = \Delta_\gamma \arg z.$$

в) В силу предложения 38, имеем $\gamma(t) = r(t)e^{i\Theta(t)}$, $t \in [a, b]$, где функции $r(t) = |\gamma(t)|$ и $\Theta(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, причем $r(b) = r(a)$. Следовательно

$$\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi} = \int_a^b \frac{\left(r(t)e^{i\Theta(t)}\right)'}{r(t)e^{i\Theta(t)}} dt =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\Theta'(t) \right) dt = \left(\ln r(t) + i\Theta(t)\right)\big|_a^b = i\Delta_\gamma \arg z.$$

□

Следствие 16. *Не существует действительной функции $\theta(z)$ непрерывной в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и удовлетворяющей в ней уравнению $z = |z|e^{i\theta(z)}$.*

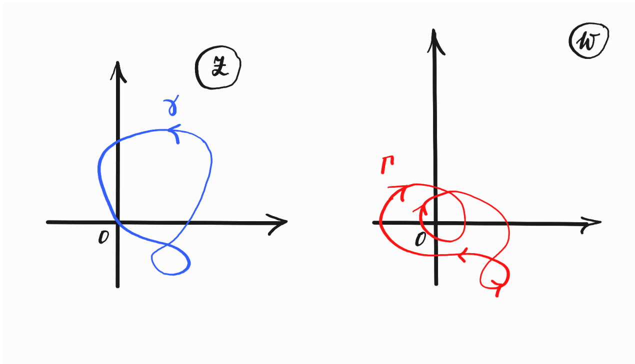


Рис. 8.2:

Доказательство. Допустим противное. Тогда для любой непрерывной кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция $\Theta(t) = \theta(\gamma(t))$ непрерывна и удовлетворяет соотношению (8.5), значит если γ замкнута, то $\Delta_\gamma \arg z = \Theta(b) - \Theta(a) = 0$. Но если $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, то, в силу (8.7), имеем

$$\Delta_\gamma \arg z = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi} = 2\pi \neq 0,$$

что противоречит нашему предположению. $\square$

Замечание 13. Пусть D — область с простой границей $\partial D = \cup_{j=1}^n \gamma_j$, где кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ попарно не пересекающиеся простые замкнутые кривые, ориентированные так, что при обходе по ∂D область D остается слева. Пусть $0 \notin \partial D$. Положим

$$\Delta_{\partial D} \arg z = \sum_{j=1}^n \Delta_{\gamma_j} \arg z.$$

Из предложения 39 следует, что это определение корректно и

$$\Delta_{\partial D} \arg z = \int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Пусть функция $f(z)$ непрерывна и отлична от нуля вдоль непрерывной кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Рассмотрим отображение $w = f(z)$ и через Γ обозначим образ кривой γ при отображении f (см. рис. 8.2) (т.е. $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a,b]$).

Определение 42. Величина $\Delta_\gamma \arg f(z) := \Delta_\Gamma \arg w$ называется *изменением аргумента функции $f(z)$ вдоль γ.*

Предложение 40 (Свойства $\Delta_\gamma \arg f(z)$)**.** *Пусть γ — непрерывная кривая, функция $f(z)$ отлична от нуля и непрерывна вдоль γ, кривая Γ является образом γ при отображении f. Тогда:*

а) $\Delta_{\gamma^-} \arg f(z) = -\Delta_\gamma \arg f(z)$;

б) если $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, то

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_{\gamma_1} \arg f(z) + \Delta_{\gamma_2} \arg f(z);$$

в) если $f(z) = f_1(z) f_2(z)$, где функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны вдоль γ, то

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z);$$

г) если кривая γ — непрерывно дифференцируема и $f \in \mathcal{O}(\gamma)$, то[1]

$$\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = i\Delta_\gamma \arg f(z) = 2\pi i n, \qquad (8.8)$$

где n — число обходов кривой Γ вокруг нуля с учетом направления.

Доказательство. Как и выше, считаем, что кривая γ параметризована отрезком $[a, b]$.

Свойства а) и б) немедленно следуют из предложения 39.

в) По условию функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ отличны от нуля на кривой γ. Пусть $\Gamma_j(t) = f_j(\gamma(t))$, $j = 1, 2$, $t \in [a, b]$. В силу части 1 предложения 38, существуют такие непрерывные действительные функции Θ_1 и Θ_2, что

$$\Gamma_j(t) = |\Gamma_j(t)| e^{i\Theta_j(t)}, \quad j = 1, 2, \quad t \in [a, b].$$

Поэтому

$$\Gamma(t) = \Gamma_1(t)\Gamma_2(t) = |\Gamma_1(t)\Gamma_2(t)| e^{i(\Theta_1(t) + \Theta_2(t))} = |\Gamma(t)| e^{i\Theta(t)},$$

где $\Theta(t) = \Theta_1(t) + \Theta_2(t)$. Следовательно,

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\Gamma w = \Theta(b) - \Theta(a) =$$

$$= (\Theta_1(b) - \Theta_1(a)) + (\Theta_2(b) - \Theta_2(a)) =$$

[1] напомним, что $f \in \mathcal{O}(\gamma)$, если функция f голоморфна в окрестности кривой γ

$$= \Delta_{\Gamma_1} w + \Delta_{\Gamma_2} w = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z).$$

г) Так как Γ является замкнутой непрерывно дифференцируемой кривой, то из (8.7) имеем

$$i\Delta_\gamma \arg f(z) = i\Delta_\Gamma \arg w = \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \{\Gamma(t) = f(\gamma(t)), t \in [a,b]\} =$$

$$= \int_a^b \frac{(f(\gamma(t)))'}{f(\gamma(t))} dt = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))} dt = \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$$

□

Замечание 14. Пусть D — область с простой границей $\partial D = \cup_{j=1}^n \gamma_j$, где кривые γ_1, …, γ_n попарно не пересекающиеся простые замкнутые кривые, ориентированные так, что при обходе по ∂D область D остается слева. Рассмотрим функцию $f(z)$ непрерывную и отличную от нуля на ∂D. Из свойств предложения 40 вытекает, что величина

$$\Delta_{\partial D} \arg f(z) := \sum_{j=1}^n \Delta_{\gamma_j} \arg f(z)$$

определена корректно, причем свойства в), г) остаются справедливыми при замене кривых γ и Γ на множество ∂D и его образ при отображении f соответственно.

8.3 Принцип аргумента, теорема Руше, доказательство основной теоремы алгебры

Предложение 41 (Принцип аргумента)**.** *Пусть D — область с простой границей, функция $f(z)$ мероморфна в некоторой области $G \Supset D$ и имеет в области G не более чем конечное число нулей и полюсов, причем все эти нули и полюсы содержатся в области D. Тогда*

$$N(f,D) - P(f,D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f(z). \tag{8.9}$$

Доказательство. По теореме о логарифмическом вычете (см. (8.1)) и замечания 14, имеем

$$N(f,D) - P(f,D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f(z).$$

$\square$

Следующее утверждение имеет многочисленные применения, в частности позволяет доказать основную теорему алгебры.

Теорема 19 (Теорема Руше)**.** *Пусть D — область с простой границей, функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны в некоторой области $G \Supset D$ и*

$$|\phi(z)| > |\psi(z)| \quad \text{при всех} \quad z \in \partial D. \tag{8.10}$$

Тогда функции $\phi(z)$ и $\phi(z) + \psi(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей с учетом кратности.

Доказательство. В силу (8.10), в каждой точке $z \in \partial D$:

$$\phi(z) \neq 0, \quad |\phi(z) + \psi(z)| \geq |\phi(z)| - |\psi(z)| > 0.$$

Тем самым обе функции $\phi(z)$ и $\phi(z) + \psi(z)$ не имеют нулей на ∂D.

Покажем, что в области D функция $\phi(z)$ имеет конечное число нулей. Предположим от противного, что это не так. Тогда множество нулей функции $\phi(z)$ имеет предельную точку $z_0 \in \overline{D} \subset G$ и, по теореме единственности, $\phi \equiv 0$ в области G. Но $\phi(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$, что противоречит нашему предположению. Аналогично, функция $\phi(z) + \psi(z)$ имеет конечное число нулей в области D. Возьмем такую область G_1, что $D \Subset G_1 \subset G$ и все нули функций $\phi(z)$ и $\phi(z) + \psi(z)$ из области G_1 лежат в области D. (Для этого в каждой точке $\xi \in \partial D$ возьмем круг $U_{r_\xi}(\xi) \subset G$, не содержащий нулей функций $\phi(z)$ и $\phi(z)+\psi(z)$ и положим $G_1 = D \cup \left(\cup_{\xi \in \partial D} U_{r_\xi}(\xi)\right)$.) Применяя принцип аргумента к функциям $\phi(z)$ и $\phi(z) + \psi(z)$, получаем

$$N(\phi, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg \phi(z), \quad N(\phi + \psi, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg \left(\phi(z) + \psi(z)\right). \tag{8.11}$$

В силу замечания 14,

$$\begin{aligned} \Delta_{\partial D} \arg \left(\phi(z) + \psi(z)\right) &= \Delta_{\partial D} \arg \left(\phi(z) \left(1 + \frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right)\right) = \\ &= \Delta_{\partial D} \arg \phi(z) + \Delta_{\partial D} \arg \left(1 + \frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right). \end{aligned} \tag{8.12}$$

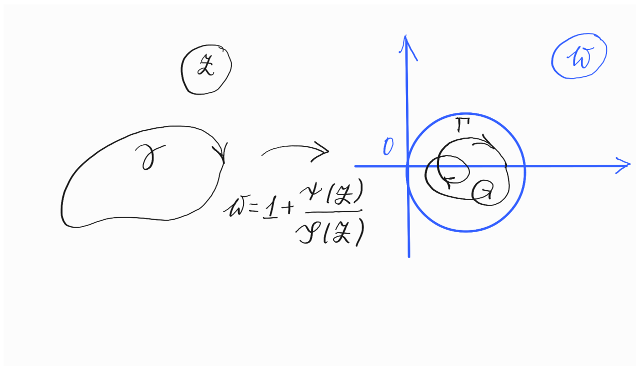


Рис. 8.3:

По условию, $\left|\frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right| < 1$ при $z \in \partial D$. Поэтому для каждой простой жордановой кривой $\gamma \subset \partial D$, ее образ Γ при отображении $w = 1 + \frac{\psi(z)}{\phi(z)}$ содержится в круге $U_1(1)$, который, в свою очередь, содержится в правой полуплоскости (см. рис. 8.3). Отсюда

$$\Delta_\gamma \arg\left(1 + \frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right) = \Delta_\Gamma \arg w = 0$$

(последнее равенство вытекает из следствия 15).

Таким образом, $\Delta_{\partial D} \arg\left(1 + \frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right) = 0$ и, согласно (8.12), (8.11), последовательно имеем

$$\Delta_{\partial D} \arg\left(\phi(z) + \psi(z)\right) = \Delta_{\partial D} \arg \phi(z),$$

$$N(\phi + \psi, D) = \quad N(\phi, D).$$

□

Доказательство основной теоремы алгебры с помощью теоремы Руше. Пусть

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0$$

— многочлен степени n комплексными коэффициентами. Покажем, что многочлен $P(z)$ имеет ровно n комплексных корней с учетом кратности.

Во-первых, существует такое $R > 0$, что при $|z| \geq R$ справедлива оценка

$$|a_n z^n| > |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0|,$$

значит и $|P_n(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| > 0$. Поэтому все корни многочлена $P_n(z)$ лежат в круге $U_R(0)$.

Во-вторых, полагая $D = U_R(0)$, $\phi(z) = a_n z^n$, $\psi(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, по теореме Руше получаем

$$N(P_n, D) = N(\phi + \psi, D) = N(\phi, D) = n.$$

Глава 9

Локальные свойства голоморфных функций

9.1 Лемма о числе прообразов вблизи данной точки, принцип сохранения области, критерий локальной однолистности, теорема об обратной функции (общий случай)

Следующее утверждение носит вспомогательный характер.

Лемма 6 (Лемма о числе прообразов вблизи данной точки). *Пусть $f(z)$ — непостоянная голоморфная функция в окрестности точки z_0, $w_0 = f(z_0)$, $n = \min\{j \in \mathbb{N} : f^{(j)}(z_0) \neq 0\}$ (иными словами, n — порядок нуля функции $f(z) - w_0$ в точке z_0). Тогда существует такое $\rho > 0$, что для любого $r \in (0, \rho)$:*

а) $f^{-1}(w_0) \cap U_r(z_0) = \{z_0\}$;

б) найдется такое $\delta = \delta(r) > 0$, что для любого $w \in U^0_\delta(w_0)$ множество $f^{-1}(w) \cap U_r(z_0)$ состоит ровно из n точек.

Доказательство. В силу изолированности нулей непостоянной голоморфной функции $f(z) - w_0$, существует такое $\rho_1 > 0$, что $f \in \mathcal{O}(U_{\rho_1}(z_0))$ и $f(z) \neq w_0$ при $z \in U^0_{\rho_1}(z_0)$. Поскольку $f'(z)$ не равна тождественно нулю в круге $U_{\rho_1}(z_0)$, то существует такое $\rho \leq \rho_1$, что $f'(z)$ отлична от нуля всюду в круге $U_\rho(z_0)$ за исключением, быть может, точки z_0.

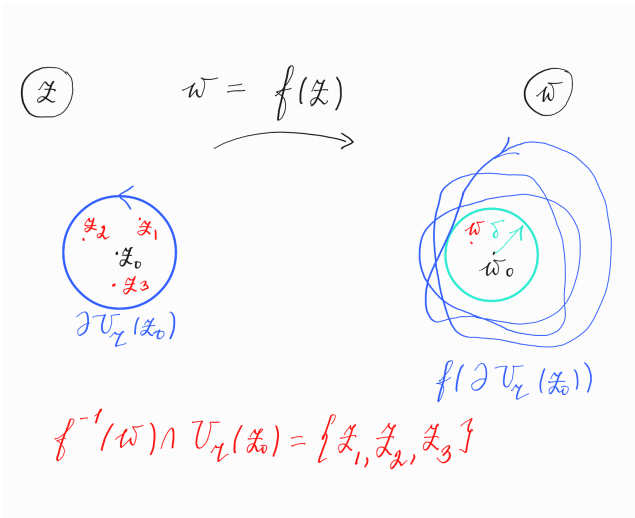


Рис. 9.1:

Проверим, что число ρ — искомое. Поскольку $\rho \le \rho_1$, справедливо утверждение а).

Возьмем произвольное $r \in (0, \rho)$. Так как $f(z) - w_0 \neq 0$ на компакте $\partial U_r(z_0)$, то число

$$\delta := \min_{z \in \partial U_r(z_0)} |f(z) - w_0| > 0.$$

Рассмотрим функцию $\phi(z) = f(z) - w_0$. В силу а), точка w_0 является единственным нулем функции $\phi(z)$ в круге $U_r(z_0)$ и по условию порядок этого нуля равен n. Отсюда $N(\phi, U_r(z_0)) = n$. Возьмем любое $w \in U^0_\delta(w_0)$. Тогда в круге $U_r(z_0)$ функции $\phi(z) = f(z) - w_0$ и $\psi(z) = w_0 - w$ (функция ψ постоянна) удовлетворяют условиям теоремы Руше, ибо $\phi, \psi \in \mathcal{O}(\overline{U_r(z_0)})$ и в точках $z \in \partial U_r(z_0)$ выполняется неравенство

$$|\psi(z)| = |w_0 - w| < \delta \le |f(z) - w_0| = |\phi(z)|.$$

Поэтому число нулей функции $f - w = \phi + \psi$ в этом круге равно

$$N(f - w, U_r(z_0)) = N(\phi + \psi, U_r(z_0)) = N(\phi, U_r(z_0)) = n.$$

Пусть z — любой из этих нулей. Так как $w \neq w_0$ и $r < \rho$, то $z \neq z_0$ и $(f(z) - w)' = f'(z) \neq 0$. Значит, порядок нуля функции $f - w$ в точке z равен единице. Следовательно, все нули функции $f - w$ из круга $U_r(z_0)$

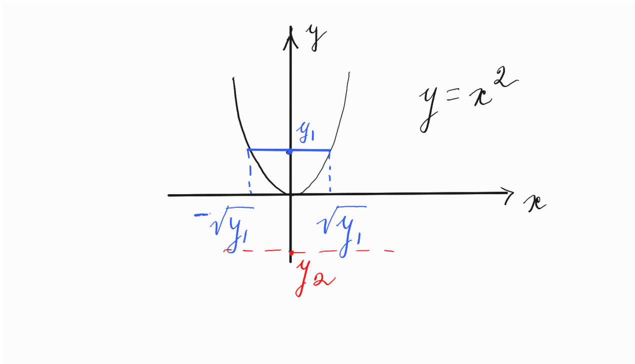


Рис. 9.2:

различны и их ровно n (на рис. 9.1 $n = 3$), что доказывает утверждение б). $\square$

Отметим, что для действительных функций предыдущее утверждение неверно. Например, если $y = x^2$, то в любой проколотой окрестности точки $y_0 = 0$ есть как точки, имеющие 2 прообраза (если $y > 0$), так и точки, не имеющие прообразов (если $y < 0$) (см. рис. 9.2).

Следствие 17. *Пусть $f(z)$ — непостоянная голоморфная функция в окрестности точки z_0, $w_0 = f(z_0)$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что круг $U_\delta(w_0)$ содержится в образе этой окрестности при отображении f.*

Доказательство. Возьмем ρ как в лемме 6 и $r \in (0, \rho)$. Тогда $\delta = \delta(r)$ — искомое. $\square$

Предложение 42 (Принцип сохранения области)**.** *Пусть функция f непостоянна и голоморфна в области D. Тогда множество $G = f(D)$ является областью.*

Доказательство. В силу следствия 17, каждая точка $w_0 \in G$ содержится в множестве G вместе с некоторой δ-окрестностью. Поэтому множество G открыто.

Рассмотрим произвольные точки w_0, $w_1 \in G$. По условию существуют такие z_1, $z_2 \in D$, что $w_j = f(z_j)$, $j = 1, 2$. Так как множество D является областью, то D линейно связно, значит существует непрерывная кривая γ, лежащая в D, с началом в точке z_0 и концом в точке z_1. Пусть кривая

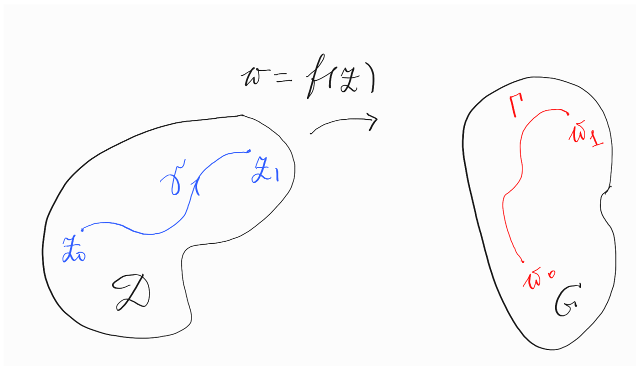


Рис. 9.3:

Γ является образом кривой γ при отображении f (см. рис. 9.3). Тогда Γ — непрерывная кривая, лежащая в множестве G, с началом в точке w_0 и концом в точке w_1. Таким образом, G — линейно связно.

Итак, G — открытое линейно связное множество, следовательно, область. $\square$

Замечание 15. Отметим, что в действительном случае образ открытого множества при гладком отображении уже не обязательно открыт. Например, образом интервала $(-1, 1)$ при отображении $y = x^2$ будет полуинтервал $[0, 1)$.

Следующее определение обычно используется для функций, голоморфных на открытом множестве.

Определение 43. Пусть E — открытое множество и функция $f(z)$ определена на E. Функция $f(z)$ называется *однолистной на множестве* E, если образы различных точек из множества E различны. Функция f называется *локально однолистной на множестве* E, если для любой точки $z_0 \in E$ существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ однолистна.

Предложение 43 (Критерий локальной однолистности)**.** *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D. Тогда для локальной однолистности функции $f(z)$ в области D необходимо и достаточно, чтобы $f'(z) \neq 0$ в области D.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(z)$ локально однолистна в D. Очевидно, что f непостоянна в D. Предположим от противного, что существует такая $z_0 \in D$, что $f'(z_0) = 0$. Тогда число $n = \min\{j \in \mathbb{N} :$

$f^{(j)}(z_0) \neq 0\} \geq 2$. Возьмем окрестность $V \subset D$ точки z_0, в которой функция $f(z)$ однолистна. Пусть ρ, $r \in (0, \rho)$, $\delta = \delta(r)$ — как в лемме 6, причем число $r \in (0, \rho)$ такое маленькое, что $U_r(z_0) \subset V$, $w \in U_\delta^0(w_0)$. В силу леммы 6, множество $f^{-1}(w) \cap U_r(z_0)$ состоит из n точек. Следовательно, функция f не является однолистной в V — противоречие.

Достаточность. Пусть $f'(z) \neq 0$ в области D. Возьмем любую $z_0 \in D$. Тогда число $n = \min\{j \in \mathbb{N} : f^{(j)}(z_0) \neq 0\} = 1$. Вновь, пусть ρ, $r \in (0, \rho)$, $\delta = \delta(r)$ — как в лемме 6. Тогда для любого $w \in U_\delta(w_0)$ существует единственная точка $z \in U_r(z_0)$, для которой $f(z) = w$. В силу непрерывности функции $f(z)$, прообраз $f^{-1}(U_\delta(w_0))$ является открытым множеством в D. Значит $f(z)$ однолистна на открытом множестве $V = U_r(z_0) \cap f^{-1}(U_\delta(w_0))$, содержащем точку z_0. □

Предложение 44 (Общая теорема об обратной функции)**.** *Пусть функция $f(z)$ однолистна и голоморфна в области D. Тогда функция $g(w)$, обратная к $f(z)$, голоморфна в области $f(D)$, причем $g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$. (Согласно принципу сохранения области, множество $f(D)$ является областью.)*

Доказательство. Так как функция $f(z)$ однолистна в области D, то в каждой точке $z \in D$ в силу критерия локальной однолистности, $f'(z) \neq 0$, значит число $n = \min\{j \in \mathbb{N} : f^{(j)}(z) \neq 0\} = 1$ независимо от z.

Покажем, что $g \in C(f(D))$. Достаточно показать, что $g(w)$ непрерывна в произвольной точке $w_0 \in f(D)$. Действительно, пусть $z_0 = g(w_0)$, ρ как в лемме 6 и $\epsilon > 0$ — произвольное. Возьмем число r из интервала $(0, \min(\rho, \epsilon))$. Из леммы 6 следует, что существует такое $\delta(r) > 0$, что для любого $w \in U_\delta(w_0)$ множество $f^{-1}(w) \cap U_r(z_0)$ состоит из одной точки. Но эта точка равна $g(w)$, следовательно,

$$\text{если} \quad |w - w_0| < \delta, \quad \text{то} \quad |g(w) - g(w_0)| < r < \epsilon,$$

откуда и следует непрерывность функции $g(w)$ в точке w_0.

Таким образом, отображение $w = f(z)$ является гомеоморфизмом области D на область $f(D)$ и $f' \neq 0$ в точках из D. Далее следует применить теорему об обратной функции, доказанную в предложении 6 главы 2. □

Глава 10

Принцип максимума модуля для голоморфной функции. Теорема единственности, принцип максимума для гармонических функций

10.1 Принцип максимума модуля для голоморфной функции и его следствия. Вторая теорема Вейерштрасса для рядов голоморфных функций

Предложение 45 (Принцип (локального) максимума модуля для голоморфной функции)**.** *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D и $|f(z)|$ имеет локальный максимум в точке $z_0 \in D$. Тогда функция $f(z)$ постоянна.*

Доказательство. Допустим, что функция $f(z)$ непостоянна и $w_0 = f(z_0)$. По условию существует такое $r > 0$, что $|f(z)| \le |w_0|$ для всех $z \in U_r(z_0)$. В силу следствия 17 существует такое $\delta > 0$, что

$$U_\delta(w_0) \subset f\left(U_r(z_0)\right). \tag{10.1}$$

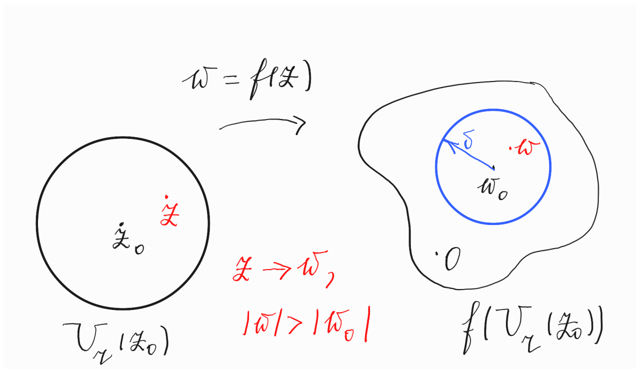


Рис. 10.1:

В круге $U_\delta(w_0)$ найдется такая точка w, что $|w| > |w_0|$ (см. рис. 10.1). Согласно включению (10.1), существует $z \in \{f^{-1}(w)\} \cap U_r(z_0)$, поэтому

$$|f(z)| = |w| > |w_0| = |f(z_0)| \quad \text{— противоречие.}$$

□

Следствие 18. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна и не имеет нулей в области D. Тогда если $|f(z)|$ имеет (локальный) минимум в точке $z_0 \in D$, то функция $f(z)$ постоянна.*

Доказательство. По условию функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ голоморфна в D и имеет (локальный) максимум в точке z_0. По предыдущему утверждению функция $g(z)$ постоянна . Следовательно, и $f(z)$ постоянна. □

Следствие 19. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда* $\max_{z\in\overline{D}} |f(z)| = \max_{z\in\partial D} |f(z)|$.

Доказательство. Так как функция $f(z)$ непрерывна на компакте $\overline{D}$, существует $z_0 \in \overline{D}$ в которой достигается максимум $|f(z)|$. Если функция $f(z)$ постоянна в D (а значит и в $\overline{D}$), то утверждение верно. Если $f(z)$ непостоянна, то, по принципу максимума модуля, $z_0 \notin D$, поэтому утверждение также верно. □

Следствие 20. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ и $f_1(z) = f_2(z)$ в точках $z \in \partial D$. Тогда $f_1(z) = f_2(z)$ в точках области D.*

Доказательство. Нужно применить следствие 19 к функции $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. $\square$

Предложение 46 (Вторая теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций)**.** *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $f_n \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$, $n \in \mathbb{N}$ и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{10.2}$$

сходится равномерно на ∂D. Тогда этот ряд сходится равномерно в $\overline{D}$ и его сумма голоморфна в D.

Доказательство. Из критерия Коши равномерной сходимости ряда (10.2) на ∂D следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ и $z \in \partial D$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+p} f_j(z) \right| < \epsilon. \tag{10.3}$$

В силу следствия 19, неравенство (10.3) справедливо для тех же n, p и для всех $z \in \overline{D}$, значит ряд (10.2) сходится равномерно в $\overline{D}$ к некоторой функции $f(z)$. Согласно первой теореме Вейерштрасса, $f \in \mathcal{O}(D)$. $\square$

10.2 Теорема единственности для гармонических функций. Принцип (локального) экстремума для гармонических функций

Следующее утверждение является аналогом теоремы единственности для голоморфных функций.

Теорема 20 (Теорема единственности для гармонических функций)**.** *Пусть u_1 и u_2 — две гармонические функции в области D, совпадающие в некоторой окрестности точки $z_0 \subset D$. Тогда $u_1(x, y) = u_2(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in D$.*

Доказательство. Пусть $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$. Тогда функция u является гармонической в D и тождественно равной нулю в окрестности точки z_0. Нам достаточно убедиться, что u тождественно равна нулю в D.

Рассмотрим множество

$$E = \{z = x + iy \in D : u \equiv 0 \quad \text{в некоторой окрестности точки } z\}$$

Так как $z_0 \in E$, то E непусто. По определению множество E открыто.

Покажем, что E замкнуто в D. Пусть последовательность $\{z_n\} \subset E$ сходится к точке $a \in D$. Возьмем произвольный круг $U_\rho(a) \subset D$. По определению множества E, достаточно показать, что функция u тождественно равна нулю в этом круге. В силу предложения 20, существует такая функция $f \in \mathcal{O}(U_\rho(a))$, что $u = \operatorname{Re} f$ в круге $U_\rho(a)$. Так как $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, то существует точка $z_k \in U_\rho(a)$. Поскольку $z_k \in E$, существует круг $U_\delta(z_k) \subset U_\rho(a)$, в котором функция u тождественно равна нулю. Рассмотрим функцию $g(z) = e^{f(z)}$. Она голоморфна в круге $U_\rho(a)$, а в точках из $U_\delta(z_k)$ удовлетворяет равенству

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} = e^{u(x,y)} = 1.$$

По принципу максимума модуля функция $g(z)$ постоянна в круге $U_\rho(a)$. Тем самым $f(z)$ и $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ постоянны в этом круге. Поэтому u тождественно равна нулю не только в $U_\delta(z_k)$, но и в $U_\rho(a)$.

Итак, E — непустое открытое и замкнутое в D множество. По лемме об открыто-замкнутом множестве из главы 4 получаем, что функция u тождественно равна нулю в D.

□

Замечание 16. Отметим, что для равенства двух функций, голоморфных в области D достаточно их равенства на множестве, имеющем предельную точку в области D. Для гармонических функций этого уже недостаточно, например, функции $u_1(x,y) = 0$, $u_2(x,y) = y$ являются гармоническими на всей плоскости и совпадают на оси x, однако вне оси x их значения различны.

Предложение 47 (Принцип (локального) экстремума для гармонических функций)**.** *Пусть функция $u(x,y)$ является гармонической в области D и имеет в точке $z_0 \in D$ локальный экстремум. Тогда $u(x,y)$ постоянна в D.*

Доказательство. Предположим, что в точке z_0 функция u имеет локальный максимум (иначе рассмотрим функцию $u_1(x, y) = -u(x, y)$). Возьмем круг $U_r(z_0) \subset D$ и такую функцию $f \in \mathcal{O}(D)$, что $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y)$ в этом круге. Как и в предыдущей теореме, рассмотрим функцию $g(z) = e^{f(z)}$. Так как $|g(z)| = e^{u(x,y)}$, то $|g(z)| \leq |g(z_0)|$ при $z \in U_r(z_0)$. По принципу максимума модуля, функция $g(z)$ постоянна. Следовательно, функция $f(z)$, а значит и $u(x, y)$ постоянны в круге $U_r(z_0)$. По теореме единственности для гармонических функций получаем, что функция $u(x, y)$ постоянна в D. $\square$

Глава 11

Общие принципы конформных отображений. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями

11.1 Конформные отображения областей расширенной комплексной плоскости

В предыдущих главах рассматривались комплекснозначные функции, определенные на подмножествах комплексной плоскости. Начиная с этой главы, мы будем рассматривать и функции, определенные на подмножествах $\overline{\mathbb{C}}$ и принимающих значения из $\overline{\mathbb{C}}$.

Напомним (см. определение 6), что ϵ-окрестностью бесконечности в $\overline{\mathbb{C}}$ называется множество $U_\epsilon(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \epsilon\} \cup \{\infty\}$. Назовем множество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ открытым, если для любой точки $a \subset V$ существует такое $r > 0$, что $U_r(a) \subset V$. Для подмножеств из $\mathbb{C}$ это определение совпадает с введенным ранее. Окрестностью бесконечности назовем любое открытое множество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащее бесконечность. Множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется областью, если D открыто и $D \setminus \{\infty\}$ является областью.

Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$, V — окрестность точки a. Функция $f : V \to \overline{\mathbb{C}}$ называется *непрерывной в точке* a, если $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$. Пусть D — открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$. Функция $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ называется *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Дадим теперь определение конформного отображения в точке расширенной комплексной плоскости. Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ и отображение

$$w = f(z) \tag{11.1}$$

определено в некоторой окрестности точки a и принимает значения в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда возможны четыре случая:

(1) $a \in \mathbb{C}$, $f(a) \in \mathbb{C}$;

(2) $a = \infty$, $f(a) \in \mathbb{C}$;

(3) $a \in \mathbb{C}$, $f(a) = \infty$;

(4) $a = \infty$, $f(a) = \infty$.

В первом случае отображение (11.1) называется конформным в точке a, если оно удовлетворяет определению 13 главы 2. Напомним, что в этом случае данное отображение конформно в точке a, если оно непрерывно в окрестности точки a, функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ дифференцируемы в точке a и для любых двух кривых, проходящих через точку a и имеющих в этой точке ненулевые касательные векторы, угол в точке a от первой кривой до второй кривой равен углу в точке $f(a)$ от образа первой кривой до образа второй кривой при отображении $w = f(z)$. В силу теоремы 2, отображение (11.1) является конформным в точке a $\iff$ функция f непрерывна в окрестности точки a, дифференцируема в точке a и $f'(a) \neq 0$.

В оставшихся случаях отображение (11.1) называется конформным в точке a, если:

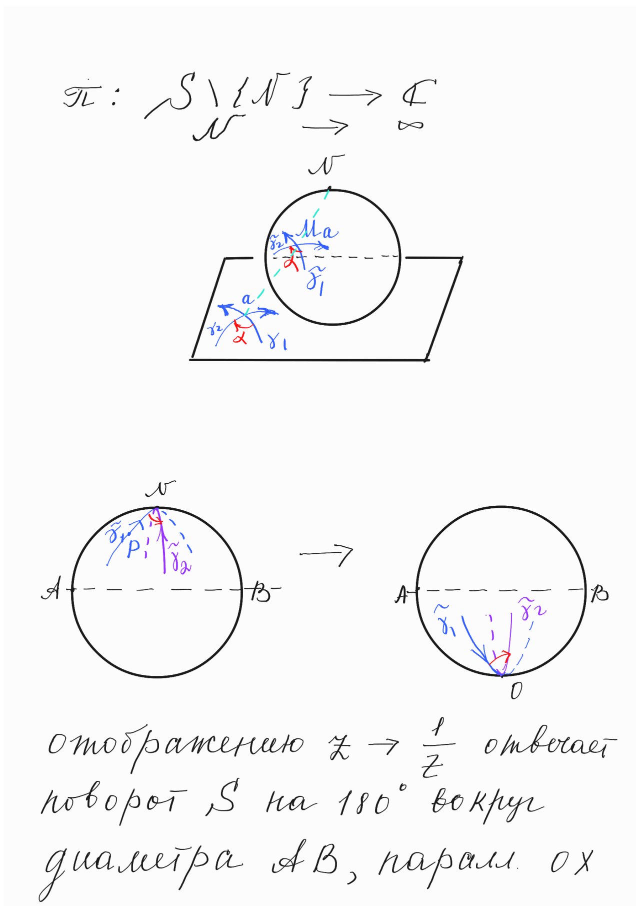
в случае (2) отображение $w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ конформно в точке $\zeta = 0$ (считаем $w(0) = f(\infty)$);

в случае (3) отображение $\eta = \frac{1}{f(z)}$ конформно в точке $z = a$ (считаем $\eta(a) = 0$);

в случае (4) отображение $\eta = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ конформно в точке $\zeta = 0$ (считаем $\eta(0) = 0$).

Определение 44. Пусть D, G — области в $\overline{\mathbb{C}}$. Отображение $w = f(z)$ называется конформным отображением D на G, если оно является биекцией D на G и конформно в каждой точке области D.

Мотивировка данного определения такова: если S — сфера Римана, $\pi : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — стереографическая проекция, γ_1 и γ_2 — гладкие кривые на комплексной плоскости, проходящие через точку a, $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2$ —



$\pi : S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$
$N \to \infty$
N
a
A
B
P
O
отображению $z \to \frac{1}{z}$ отвечает
поворот S на 180° вокруг
диаметра AB, парал. OX

Рис. 11.1:

их прообразы при стереографической проекции, $M_a = \pi^{-1}(a)$, то угол от кривой γ_1 до кривой γ_2 в точке a равен углу от кривой $\widetilde{\gamma}_1$ до кривой $\widetilde{\gamma}_2$ в точке M_a (см. рис. 11.1). Также, отображение $z \to \frac{1}{z}$ расширенной комплексной плоскости отвечает повороту сферы Римана на 180 градусов вокруг диаметра, параллельного оси x, а значит сохраняет углы между кривыми на сфере Римана.

Из общей теоремы об обратной функции (см. предложение 44) следует

Предложение 48 (Конформность отображения, осуществляемого однолистной голоморфной функцией)**.** *Пусть функция $f(z)$ голоморфна и однолистна в области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда $w = f(z)$ является конформным отображением D на $f(D)$ и обратное к нему отображение $z = g(w)$ является конформным отображением $f(D)$ на D.*

Справедливо и обратное утверждение, которое мы приведем без доказательства

Предложение 49. *Пусть D, G — области в $\mathbb{C}$ и f конформно отображает D на G. Тогда f является однолистной голоморфной функцией в области D.*

11.2 Обратный принцип соответствия границ; теоремы Каратеодори и Римана (без доказательства)

Следующее утверждение также называют принципом соответствия границ.

Предложение 50 (Обратный принцип соответствия границ)**.** *Пусть D_1 и D_2 — ограниченные области, границами которых являются кусочно гладкие кривые[1] γ_1 и γ_2 соответственно. Предположим, что функция $f \in \mathcal{O}(\overline{D_1})$ гомеоморфно отображает γ_1 на γ_2. Тогда функция $f(z)$ конформно отображает D_1 на D_2.*

Доказательство. Пусть $w_0 \in \mathbb{C}$. Покажем, что множество $\{f^{-1}(w_0)\} \cap D_1$ либо состоит из единственной точки (при $w_0 \in D_2$), либо пусто (при

[1] Таким образом, D_1 и D_2 — односвязные области с простой границей.

$w_0 \in \mathbb{C} \setminus D_2$). Тогда мы получим, что функция $f(z)$ однолистна в D_1 и $f(D_1) = D_2$, а значит, в силу предложения 48, f конформно отображает D_1 на D_2.

Пусть $\gamma_1(t), t \in [a, b]$ — параметризация кривой γ_1. Так как f гомеоморфно отображает γ_1 на γ_2, то $f(\gamma_1(t)), t \in [a, b]$ — либо параметризация кривой γ_2, либо параметризация кривой γ_2^-.

Предположим, что $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma_2$. Тогда функция $f(z) - w_0$ не имеет нулей на $\gamma_1 = \partial D_1$. Применяя теорему о логарифмическом вычете к функции $f(z) - w_0$ и области D_1, получаем

$$\begin{aligned} N(f(z) - w_0, D_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{(f(\xi) - w_0)'}{f(\xi) - w_0} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma_1(t))}{f(\gamma_1(t)) - w_0} \gamma_1'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f(\gamma_1(t)))'}{f(\gamma_1(t)) - w_0} dt. \end{aligned} \tag{11.2}$$

С другой стороны, применяя теорему о логарифмическом вычете к функции $w - w_0$ и области D_2, получаем

$$\begin{aligned} N(w - w_0, D_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{(w - w_0)'}{w - w_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{w - w_0} dw = \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma_1(t)) - w_0} \left(f(\gamma_1(t))\right)' dt. \end{aligned} \tag{11.3}$$

(Знак $\pm$ мы пишем потому, что пока не знаем, является ли $f(\gamma_1(t)), t \in [a, b]$ параметризацией кривой γ_2 или γ_2^-). Таким образом, $N(f(z) - w_0, D_1) = \pm N(w - w_0, D_2)$. Но, так как число нулей не может быть отрицательным, то

$$N(f(z) - w_0, D_1) = N(w - w_0, D_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } w_0 \in D_2, \\ 0, & \text{если } w_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_2}. \end{cases} \tag{11.4}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $w_0 \in \gamma_2$. Допустим, от противного, что существует такая точка $z_0 \in D_1$, что $f(z_0) = w_0$. Так как функция f непостоянна, то из принципа сохранения области следует, что существует круг $U_\delta(w_0)$, принадлежащий $f(D_1)$. Но, так как γ_2 — кусочно гладкая кривая, то в круге $U_\delta(w_0)$ найдется точка $w_1 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_2}$ (см. рис. 11.2). (Этот геометрический факт примем без доказательства.) Поэтому получается, что $N(f(z) - w_1, D_1) > 0$, что противоречит доказанному выше. $\square$

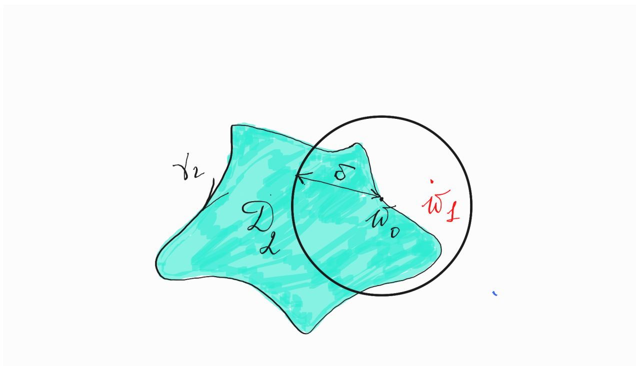


Рис. 11.2:

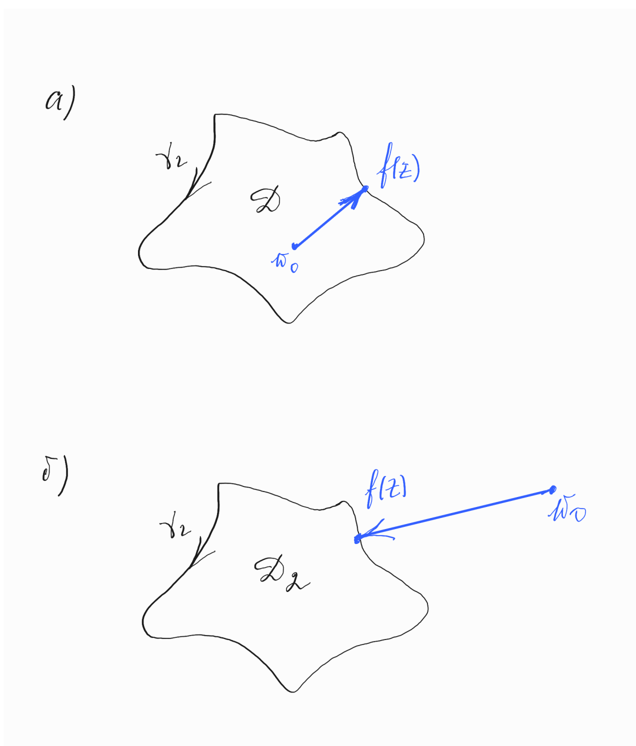


Рис. 11.3:

Замечание 17. Наглядная иллюстрация приведенных рассуждений такова. Пусть $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma_2$ и z пробегает кривую γ_1 один раз. Тогда и $f(z)$ пробегает кривую γ_2 один раз, значит либо вектор $f(z) - w_0$ (с началом w_0 и концом $f(z)$) делает один оборот вокруг нуля (в случае $w_0 \in D_2$, как на рис. 11.3а)) и тогда $\Delta_{\gamma_1} \arg(f(z) - w_0) = \pm 2\pi$, либо число оборотов вектора $f(z) - w_0$ вокруг нуля равно нулю (в случае $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_2}$, как на рис. 11.3б)) и тогда $\Delta_{\gamma_1} \arg(f(z) - w_0) = 0$. Применяя принцип аргумента и неотрицательность числа нулей, получаем (11.4).

Замечание 18. Обратный принцип соответствия границ, вообще говоря, неверен для неограниченных областей. Например, если

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \quad D_2 = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}, \quad w = f(z) = z^3.$$

Так как границами областей (в $\mathbb{C}$) являются действительные прямые, то f гомеоморфно отображает ∂D_1 на ∂D_2. Также функция $f(z)$ целая. Однако $f(D_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \neq D_2$.

Справедливо следующее обращение предыдущего утверждения, которое мы приводим без доказательства.

Теорема 21 (Теорема Каратеодори). *Пусть D_1, D_2 — ограниченные односвязные области с простой границей, функция f голоморфна в D_1 и осуществляет конформное отображение D_1 на D_2. Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\overline{D_1} \to \overline{D_2}$.*

Следующее утверждение также приведем без доказательства

Теорема 22 (Теорема Римана). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, отличная от $\mathbb{C}$. Тогда существует однолистная голоморфная в D функция f, осуществляющая конформное отображение области D на единичный круг $U_1(0)$.*

11.3 Дробно-линейные отображения

Определение 45. Пусть a, b, c, d — такие комплексные числа, что $ad - bc \neq 0$. Преобразование

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{11.5}$$

называется *дробно-линейным отображением.*

Условие $ad - bc \neq 0$ накладывается для того, чтобы функция $f(z)$ была непостоянной. В случае $c = 0$ это условие дает $a, d \neq 0$, значит (11.5) становится непостоянным линейным отображением

$$w = f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B. \qquad (11.6)$$

В случае $c = 0$ полагаем $f(\infty) = \infty$. При $c \neq 0$ полагаем $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Так определенная функция становится непрерывной на $\overline{\mathbb{C}}$. Отметим, что преобразование (11.6) — подобие, поскольку является суперпозицией растяжения $\zeta = |A|z$, поворота $\eta = e^{i \arg A}\zeta$ и сдвига $w = \eta + b$.

11.3.1 Свойства дробно-линейных отображений

1. Дробно-линейное отображение является биекцией $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ и обратное к нему тоже является дробно-линейным.

Действительно, решая уравнение (11.5) относительно z, получаем что обратное отображение

$$z = \frac{dw - b}{a - wc}$$

также является дробно-линейным, а в случае $c = 0$ — линейным. Поэтому при $c = 0$ отображение (11.6) взаимно однозначно переводит $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $\infty \to \infty$. Если же $c \neq 0$, то отображение (11.5) взаимно однозначно переводит $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, $-\frac{d}{c} \to \infty$, $\infty \to \frac{a}{c}$.

2. Совокупность дробно-линейных отображений образуют группу Λ, если в качестве групповой операции взять композицию отображений.

Действительно: прямое вычисление показывает, что если $L_j : z \to f_j(z) = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}$, $j = 1, 2$, то композиция $L_1 \circ L_2 : z \to f_1(f_2(z))$ тоже является дробно-линейным отображением. При этом выполняются аксиомы:

а) ассоциативность: если $L_j(z) : z \to f_j(z) = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}$, $j = 1, 2, 3$, то

$$L_1 \circ (L_2 \circ L_3) = (L_1 \circ L_2) \circ L_3,$$

так как каждое из отображений выше имеет вид $z \to f_1(f_2(f_3(z)))$;

б) единицей в группе является тождественное отображение;

в) согласно 1., обратное к дробно-линейному отображению тоже дробно-линейно.

Отметим, что группа Λ не коммутативна. Действительно, если $L_1 : z \to z+1$, $L_2 : z \to \frac{1}{z}$, то $L_1 \circ L_2 : z \to \frac{1}{z}+1$, $L_2 \circ L_1 : z \to \frac{1}{z+1}$. Прямое вычисление показывает, что если $f_j(z) = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}$, $j = 1, 2$, то композиция $f_1 \circ f_2$ тоже является дробно-линейным отображением.

3. Дробно-линейное отображение (11.5) **конформно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.** Так как дробно-линейное отображение является биекцией $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, достаточно проверить, что отображение (11.5) конформно в каждой точке из $\overline{\mathbb{C}}$.

Рассмотрим сначала случай $c \neq 0$. Будем проверять согласно схеме перед определением 44.

а) Если $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, то конформность в точке z следует из того, что

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

б) Проверим конформность в точке $-\frac{d}{c}$. Так как $w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, нужно показать, что отображение $\eta(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{cz+d}{az+b}$ конформно в этой точке. Имеем $\eta'(z) = \frac{bc-ad}{(az+b)^2}$, $\eta'\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0$.

в) Для доказательства конформности в точке ∞, проверим конформность суперпозиции $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{b\zeta + a}{d\zeta + c}$ в точке $\zeta = 0$. Вновь получаем, что $\left(\frac{b\zeta+a}{d\zeta+c}\right)' = \frac{bc-ad}{(d\zeta+c)^2}$, $\eta'(0) \neq 0$.

Пусть теперь $c = 0$. Тогда отображение имеет вид $w = f(z) = Az + B$, $A \neq 0$. В точках $z \in \mathbb{C}$ оно конформно, так как $f'(z) = A \neq 0$. Так как $w(\infty) = \infty$, нужно проверить конформность отображения $\eta = \frac{1}{f(\zeta^{-1})} = \frac{\zeta}{B\zeta + A}$ в точке $\zeta = 0$. Имеем $\eta'(\zeta) = \frac{A}{(Bz+A)^2}$, $\eta'(0) \neq 0$.

4. Свойство трех точек.

Предложение 51. *Каковы бы ни были три различные точки z_1, z_2, $z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и три различные точки w_1, w_2, $w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ существует единственное дробно-линейное отображение $w(z)$, удовлетворяющее $w(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$. Это отображение находится из формулы*

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \tag{11.7}$$

Соглашение: если одна из точек равна бесконечности, то в соответствующей части равенства (11.7) *убираются все множители, содер-*

жащие эту точку, например, при $z_1 = \infty$, *в левой части* (11.7) *останется только* $\frac{z_3-z_2}{z-z_2}$.

Доказательство. 1. Существование. Пусть $g(z)$ и $h(w)$ — соответственно левая и правая части равенства (11.7), с учетом соглашения. Тогда

$$g(z_1) = 0 = h(w_1), \quad g(z_2) = \infty = h(z_2), \quad g(z_3) = 1 = h(z_3).$$

Поэтому отображение $w = h^{-1} \circ g$ удовлетворяет условию и находится из равенства (11.7).

2. Единственность. Пусть отображение $f(z)$ удовлетворяет условию. Тогда композиция $\phi = h \circ f \circ g^{-1}$ оставляет точки $0, 1, \infty$ неподвижными. Так как $\phi(\infty) = \infty$, то $\phi(z) = Az + B$ — линейная функция. Учитывая, что $\phi(0) = 0$ и $\phi(1) = 1$, последовательно получаем $B = 0$, $A = 1$. Поэтому $\phi(z) \equiv z$, значит $f = h^{-1} \circ g$. □

5. Круговое свойство и сохранение симметрии при дробно-линейном отображении. Геометрия евклидовой плоскости тесно связана с преобразованиями подобия. Они переводят прямые в прямые и окружности в окружности. В случае комплексной плоскости эту роль выполняют линейные преобразования $w = Az + B$, где $A \neq 0$. Точно так же, геометрия расширенной комплексной плоскости связана с дробно-линейными преобразованиями. При этом роль прямых выполняют обобщенные окружности. Далее мы покажем, что дробно-линейные преобразования переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности.

Определение 46. *Обобщенной окружностью* называется любая прямая, или окружность на комплексной плоскости. При этом, если l — прямая, считаем, что $\infty \in l$.

Это определение мотивируется тем, что при стереографической проекции окружностям и прямым на комплексной плоскости отвечают окружности на сфере Римана.

В евклидовой геометрии имеется понятие симметрии относительно прямых, которое не меняется при движениях плоскости. Определим теперь симметрию относительно обобщенной окружности. Далее мы покажем, что свойство симметрии сохраняется при дробно-линейных отображениях.

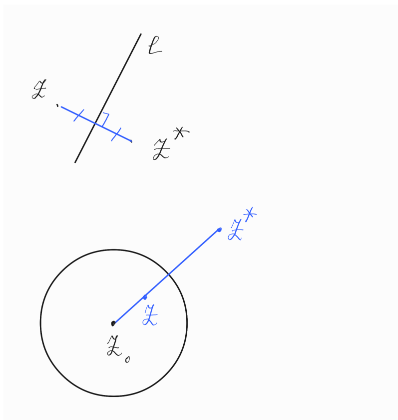


Рис. 11.4:

Определение 47. Пусть $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Точка z^* называется симметричной z относительно прямой l (см. рис. 11.4, верх), если $l \cap \mathbb{C}$ является серединным перпендикуляром отрезка с концами z и z^* (в случае $z \in l$ полагаем $z^* = z$).

Определение 48. Пусть $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Точка z^* называется симметричной z относительно окружности $\gamma = \{|z - z_0| = R\}$ (см.рис. 9.2, низ), если z и z^* лежат на одном луче с началом в точке z_0 и

$$|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$$

(считаем $z_0^* = \infty$, $\infty^* = z_0$.)

Таким образом, для каждой точки $z \in \bar{\mathbb{C}}$ существует единственная симметричная ей точка относительно обобщенной окружности (l или γ), причем $(z^*)^* = z$.

Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 7. *Для любой обобщенной окружности ω существуют такие числа $A, C \in \mathbb{R}$ и $B \in \mathbb{C}$, одновременно не равные нулю, что*

$$\omega \cap \mathbb{C} = \{Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0\}. \tag{11.8}$$

Числа A, B, C единственны с точностью до умножения на ненулевую вещественную константу. Обратно, всякое уравнение (11.8) с не равными одновременно нулю коэффициентами $A, C \in \mathbb{R}$ и $B \in \mathbb{C}$ задает либо часть обобщенной окружности, лежащую в $\mathbb{C}$, либо точку, либо пустое множество.

Доказательство. Уравнение любой окружности или прямой на плоскости имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + 2b_1x + 2b_2y + C = 0, \tag{11.9}$$

где коэффициенты A, b_1, b_2, C одновременно не равны нулю. Эти коэффициенты единственны с точностью до умножения на ненулевую вещественную константу. При этом (11.9) является уравнением прямой $\iff$ $A = 0$ и хотя бы одно из чисел b_1, b_2 отлично от нуля. Если же $A \neq 0$, то (11.9) эквивалентно уравнению

$$\left(x + \frac{b_1}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{b_2}{A}\right)^2 = D, \quad D = \frac{b_1^2 + b_2^2}{A^2} - \frac{C}{A},$$

множеством решений которого является окружность при $D > 0$, точка при $D = 0$ и пустое множество при $D < 0$. Так как

$$z + \bar{z} = 2x, \quad i\bar{z} - iz = 2y, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2,$$

то уравнение (11.9) равносильно

$$Az\bar{z} + (b_1 - ib_2)z + (b_1 + ib_2)\bar{z} + C = 0,$$

причем, если это уравнение задает обобщенную окружность, то числа A, $B = b_1 - ib_2$, C одновременно не обращаются в нуль. □

Лемма 8 (Формула для точек, симметричных относительно обобщенной окружности)**.** *Пусть обобщенная окружность* ω *определяется уравнением* (11.8)*, где числа* A*,* $C \in \mathbb{R}$*,* $B \in \mathbb{C}$ *одновременно не равны нулю. Тогда точки* z_1*,* $z_2 \in \mathbb{C}$ *симметричны относительно* ω *тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнению*

$$Az_1\bar{z}_2 + Bz_1 + \bar{B}\bar{z}_2 + C = 0. \tag{11.10}$$

Доказательство. Допустим сначала, что ω является прямой:

$$\omega \cap \mathbb{C} = \{Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0\}, \quad B \neq 0, \tag{11.11}$$

а точки z_1 и z_2 удовлетворяют уравнению

$$Bz_1 + \bar{B}\bar{z}_2 + C = 0. \tag{11.12}$$

Вычитая (11.11) из (11.12), получаем, что любая точка $z \in \mathbb{C} \cap \omega$ удовлетворяет
$$B(z_1 - z) = -\bar{B}(\bar{z}_2 - \bar{z})$$
Приравнивая модули левой и правой частей предыдущего уравнения и деля на $|B|$, получаем, что $|z_1 - z| = |z_2 - z|$. Следовательно, z равноудалена от точек z_1 и z_2, поэтому $\omega \cap \mathbb{C}$ является серединным перпендикуляром отрезка с концами z_1, z_2. Значит точки z_1 и z_2 симметричны относительно ω. Так как точка, симметричная данной, единственна, получаем, что исходное утверждение справедливо, если ω — прямая.

Рассмотрим теперь случай, когда ω — окружность с центром z_0 радиуса R. Тогда уравнение, задающее ω имеет вид
$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z_0}) = R^2.$$
Раскрывая скобки, получаем
$$\omega = \{z\bar{z} - \bar{z_0}z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z_0} - R^2 = 0\}. \tag{11.13}$$
Пусть z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ симметричны относительно ω. Тогда $z_1 \neq z_0$ (если $z_1 = z_0$, то $z_2 = (z_1)^* = \infty$ и мы этот случай не рассматриваем). Поэтому, если α — угол наклона луча, выходящего из точки z_0, на котором лежат z_1 и z_2, а $\rho = |z_1 - z_0|$, то
$$z_1 - z_0 = \rho e^{i\alpha}, \quad z_2 - z_0 = \frac{R^2}{\rho} e^{i\alpha},$$
значит
$$(z_1 - z_0)(\bar{z_2} - \bar{z_0}) = R^2. \tag{11.14}$$
Верно и обратное, если точки z_1, z_2 удовлетворяют (11.14), то $z_1 \neq z_0$ и, представляя в полярной форме $z_1 - z_0 = \rho e^{i\alpha}$, получаем $z_2 - z_0 = \frac{R^2}{\rho} e^{i\alpha}$, значит точки z_1 и z_2 лежат на одном луче, выходящем из точки z_0 под углом α и $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$, Поэтому точки z_1 и z_2 симметричны относительно ω. Раскрывая скобки, получаем, что уравнение (11.14) эквивалентно
$$z_1\bar{z}_2 - \bar{z_0}z_1 - z_0\bar{z}_2 + z_0\bar{z_0} - R^2 = 0. \tag{11.15}$$
Сравнивая уравнения (11.13) и (11.15) получаем, что исходное утверждение справедливо, если ω — окружность. $\square$

Замечание 19. Из формулы (11.12) получаем, что точка z_2, симметричная $z_1 \in \mathbb{C}$ относительно прямой $Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ имеет вид $z_2 = -\frac{1}{B}(\bar{B}\bar{z_1} + C)$. Поэтому, если последовательность $\{z_{1,n}\} \subset \mathbb{C}$ сходится к $\xi \in \overline{\mathbb{C}}$, то последовательность $z_{2,n} = z^*_{1,n}$ сходится к ξ^*. Аналогично, из формулы (11.14) получаем, что точка z_2, симметричная $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ относительно окружности $|z - z_0| = R$ имеет вид $z_2 = z_0 + \frac{R}{\bar{z_1} - \bar{z_0}}$. Поэтому, если последовательность $\{z_{1,n}\} \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ сходится к $\xi \in \overline{\mathbb{C}}$, то последовательность $z_{2,n} = z^*_{1,n}$ сходится к ξ^*.

Предложение 52 (Круговое свойство и сохранение симметрии)**.** *Пусть точки z_1, $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ симметричны относительно обобщенной окружности ω. Тогда при дробно-линейном отображении $w = f(z)$ множество $f(\omega)$ является обобщенной окружностью, а точки $f(z_1)$ и $f(z_2)$ симметричны относительно $f(\omega)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай линейного отображения $w = f(z) = Az + B$. Как сказано выше, оно является подобием, поэтому сохраняет углы, а расстояния между точками изменяет в одно и то же число раз. Поэтому прямые переходят в прямые, окружности в окружности, а точки, симметричные относительно прямой (соответственно окружности) переходят в точки, симметричные относительно образа прямой (соответственно образа окружности).

В общем случае $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $c \neq 0$. Поэтому $w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$ является суперпозицией отображений

$$\zeta = z + \frac{d}{c}, \quad \eta = \frac{1}{\zeta}, \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\eta.$$

Первое и третье из этих преобразований линейны, поэтому удовлетворяют исходному утверждению. Проверим, что отображение $\eta = \frac{1}{\zeta}$ переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности и сохраняет свойство симметрии. Пусть обобщенная окружность ω задается уравнением

$$A\zeta\bar{\zeta} + B\zeta + \bar{B}\bar{\zeta} + C = 0,$$

где числа A, B, C одновременно не равны нулю, а точки ζ_1 и $\zeta_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ симметричны относительно ω. Согласно лемме 8, точки ζ_1, ζ_2 удовлетворяют соотношению

$$A\zeta_1\bar{\zeta}_2 + B\zeta_1 + \bar{B}\bar{\zeta}_2 + C = 0.$$

Через $\widetilde{\omega}$, η_1, η_2 обозначим соответственно образы ω, ζ_1, ζ_2 при отображении $\eta = \frac{1}{\zeta}$. Покажем, что множество $\widetilde{\omega}$ является обобщенной окружностью, а точки η_1, η_2 симметричны относительно $\widetilde{\omega}$ (общий случай, когда ζ_1, $\zeta_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ получается предельным переходом, согласно замечанию 19). Подставив в уравнения выше $\zeta = \frac{1}{\eta}$, $\zeta_j = \frac{1}{\eta_j}$, $j = 1, 2$, получаем, что множество $\widetilde{\omega}$ задается уравнением

$$A + B\bar{\eta} + \bar{B}\eta + C\eta\bar{\eta} = 0, \tag{11.16}$$

а точки η_1, η_2 удовлетворяют соотношению

$$A + B\bar{\eta}_2 + \bar{B}\eta_1 + C\eta_1\bar{\eta}_2 = 0. \tag{11.17}$$

Из леммы 7 следует, что множество $\widetilde{\omega}$ либо пусто, либо точка,либо обобщенная окружность. Но первые 2 случая невозможны, поскольку отображение $\eta = \frac{1}{\zeta}$ взаимно однозначно. Согласно лемме 8, точки η_1 и η_2 симметричны относительно ω. $\square$

11.4 Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями

11.4.1 Экспоненциальная и логарифмическая функции

Экспоненциальная и логарифмическая функция были определены в конце главы 2. Здесь мы рассмотрим эти функции с точки зрения конформных отображений. Напомним, что экспоненциальная функция задается равенством $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Она является периодической с периодом $2\pi i$ и принимает все значения, кроме нуля. Если $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то

$$e^z = w \iff z \in \operatorname{Ln} w = \{\ln|w| + i \arg w + 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Экспоненциальная функция голоморфна во всей комплексной плоскости, $(e^z)' = e^z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Таким образом, отображение $w = e^z$ конформно в каждой точке комплексной плоскости. Оно конформно в области $D \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда функция e^z однолистна в области $D \subset \mathbb{C}$. Последнее имеет место в том и только в том случае, когда D не

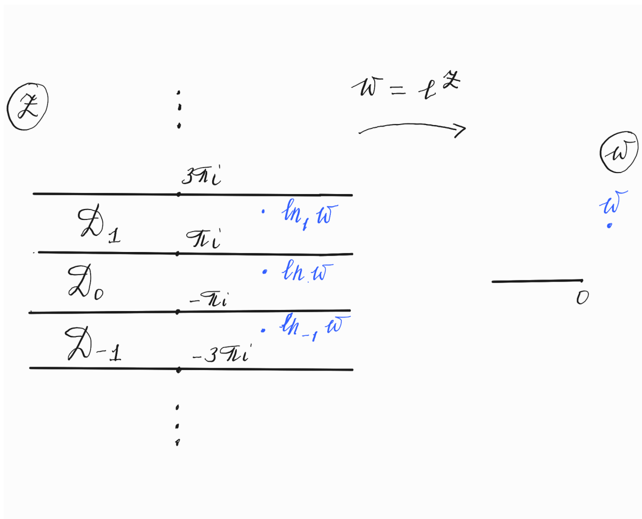


Рис. 11.5:

содержит никаких различных точек z_1, z_2, удовлетворяющих соотношению $z_1 - z_2 = 2\pi i k$ для некоторого целого k. Основным примером такой области является полоса $D_0 = \{-\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, образом которой при отображении $w = e^z$ является область $G = \{-\pi < \arg w < \pi\}$, представляющая собой плоскость w с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ (см. рис. 2.3). При этом образом прямой $\operatorname{Im} z = y$ является луч $\arg w = y$, а образом интервала $\operatorname{Re} z = x, -\pi < y < \pi$ является вся окружность $|w| = e^x$ за исключением точки $w = -e^x$.

В силу предложения 48, обратное отображение

$$z = \ln w = \ln |w| + i \arg w$$

осуществляет конформное отображение G на D_0; функция $\ln w$ голоморфна в области G, $(\ln w)' = \frac{1}{w}$.

Аналогично, $w = e^z$ конформно отображает на область G полосу $D_k = \{-\pi + 2\pi k < \operatorname{Im} z < \pi + 2\pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, причем обратное отображение $G \to D_k$ задается функцией $\ln_k w = \ln w + 2\pi i k$. Функции $\ln_k w$ называются *ветвями логарифмической функции* в области G. Каждые две ветви отличаются на аддитивную константу, кратную $2\pi i$ и для любого $w \in G$ справедливо равенство $\operatorname{Ln} w = \{\ln_k w, k \in \mathbb{Z}\}$ (см. рис. 11.5).

Следующее утверждение приведем без доказательства.

Предложение 53. *Пусть область $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ односвязна. Тогда существует такая голоморфная в D функция $\ln_D z$, что*

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln_D z + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}\}, \quad z \in D.$$

Функции $\ln_D z + 2\pi i k$ называются ветвями логарифмической функции в области D.

11.4.2 Степенная функция

Степенная функция z^n с целым показателем была уже определена в главе 2. Она голоморфна во всей комплексной плоскости при $n \geq 0$, голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ при $n < 0$ и ее производная равна $(z^n)' = nz^{n-1}$.

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Для значений $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ положим

$$z^\alpha = \{e^{\alpha \operatorname{Ln} z}\} = \{e^{\alpha(\ln|z| + i \arg z + 2\pi i k)}, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \tag{11.18}$$

Это определение совпадает при $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ с введенным раньше, так как $e^{n(\ln|z| + i \arg z + 2\pi i k)} = e^{n(\ln|z| + i \arg z)} = z^n$.

При $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, где числа p и q взаимно просты, множество (11.18) состоит из q элементов:

$$z^{\frac{p}{q}} = \{e^{\frac{p}{q}(\ln|z| + i \arg z + 2\pi i k)} = |z|^{\frac{p}{q}} e^{i\frac{p}{q}(\arg z + 2\pi k)}, k = 0, 1, \ldots, q-1\}.$$

Для $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ множество z^α счетно.

Пусть, как выше, $G = \{-\pi < \arg w < \pi\}$. Тогда в области G определены функции

$$z_k^\alpha = e^{\alpha(\ln z + 2\pi i k)}, k \in \mathbb{Z}$$

называемые *ветвями функции z^α в области G*. При этом для любого $z \in G$ справедливо равенство $z^\alpha = \{z_k^\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$. Любые две ветви отличаются на мультипликативную константу: $z_k^\alpha = z_0^\alpha e^{2\pi i k \alpha}$, число различных ветвей либо равно q, если $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, где числа p и q взаимно просты, либо счетно, если $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. По теореме о суперпозиции голоморфных функций, каждая из ветвей является голоморфной функцией в области G,

$$(z_k^\alpha)' = z_k^\alpha \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha z_k^{\alpha - 1}.$$

Следующее утверждение приведем без доказательства.

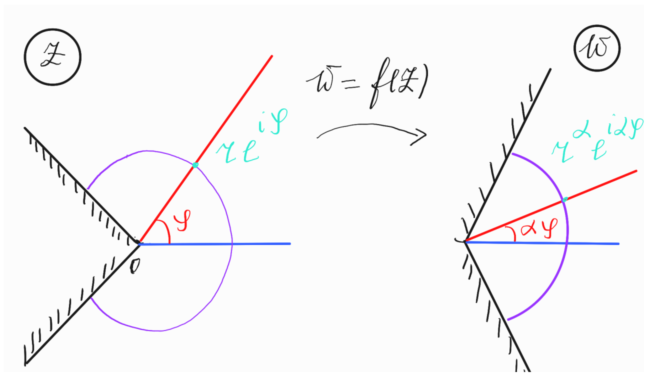


Рис. 11.6:

Предложение 54. *Пусть область $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ односвязна. Тогда существует такая голоморфная в D функция z_D^α, что*

$$z^\alpha = \{e^{2\pi i k\alpha} z_D^\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}\}, \quad z \in D.$$

Функции $e^{2\pi i k\alpha} z_D^\alpha$ называются ветвями функции z^α в области D. Число различных ветвей либо равно q, если $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, где числа p и q взаимно просты, либо счетно, если $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

Вернемся к области $G = \{-\pi < \arg w < \pi\}$ и рассмотрим случай $\alpha > 0$. Изучим свойства функции $f(z) = z_0^\alpha$, так как любая ветвь z^α отличается от $f(z)$ множителем $e^{2\pi i k\alpha}$, равным по модулю единице. Имеем:

$$f(z) = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}, \quad f'(z) = \frac{f(z)}{z} \neq 0, \quad z \in G.$$

Таким образом, отображение $w = f(z)$ конформно в каждой точке области G и конформно в любой подобласти, в которой функция f однолистна. Стандартным примером такой области является сектор

$$S_{\beta_1,\beta_2} = \{\beta_1 < \arg z < \beta_2\},$$

где $-\pi \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \pi$ и $\alpha(\beta_2 - \beta_1) \leq 2\pi$. Его образом при отображении $w = f(z)$ будет сектор

$$S_{\alpha\beta_1,\alpha\beta_2} = \{\alpha\beta_1 < \arg w < \alpha\beta_2\}.$$

Образом луча $\arg z = \phi$ будет луч $\arg w = \alpha\phi$, образом дуги $\{|z| = r, \beta_1 < \arg z < \beta_2\}$ будет дуга $\{|w| = r^\alpha, \alpha\beta_1 < \arg w < \alpha\beta_2\}$ (см. рис. 11.6).

11.4.3 Функция Жуковского

Функция
$$\lambda(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \tag{11.19}$$
называется *функцией Жуковского.* Она обладает следующими свойствами.

1. Функция Жуковского конформна во всех точках из $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением ± 1. Воспользуемся схемой перед определением 44. Если $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то $\lambda(z) \in \mathbb{C}$, $\lambda'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = 0 \iff z = \pm 1$.

Конформность $\lambda(z)$ в точке $a = 0$ равносильна конформности в точке a функции $g(z) = \frac{1}{\lambda(z)} = \frac{2z}{z^2+1}$. Так как $g'(0) = 2 \neq 0$, то функция $\lambda(z)$ конформна в этой точке.

Поскольку $\lambda(z) = \lambda(z^{-1})$, функция $\lambda(z)$ конформна в бесконечности.

2. Однолистность. Так как $\lambda(z_1) - \lambda(z_2) = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right)$ при $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\lambda(0) = \lambda(\infty)$, то функция Жуковского однолистна в области $D \subset \overline{\mathbb{C}} \iff D$ не содержит одновременно точек 0 и ∞ и двух различных точек $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, удовлетворяющих $z_1 z_2 = 1$. В этом случае, в силу общей теоремы об обратной функции, отображение $w = \lambda(z)$ конформно переводит D на $f(D)$.

Образы окружностей и лучей при отображении $w = \lambda(z)$. Пусть $z \neq 0$. Воспользуемся полярным разложением $z = re^{i\phi}$ и положим $w = u + iv$. Тогда
$$u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\phi} + r^{-1}e^{-i\phi}\right),$$
$$u = u(r, \phi) = \frac{r + r^{-1}}{2}\cos\phi, \quad v = v(r, \phi) = \frac{r - r^{-1}}{2}\sin\phi. \tag{11.20}$$

Зафиксировав $r > 0$ получаем, что образом окружности $|z| = r$, проходимой против часовой стрелки, будет:

а) при $r > 1$ — эллипс $\frac{u^2}{a_r^2} + \frac{v^2}{b_r^2} = 1$ с полуосями $a_r = \frac{r+r^{-1}}{2}$, $b_r = \frac{r-r^{-1}}{2}$, проходимый против часовой стрелки, при этом образом полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости будет часть эллипса, лежащая в верхней полуплоскости;

б) при $r < 1$ — эллипс $\frac{u^2}{a_r^2} + \frac{v^2}{b_r^2} = 1$ с полуосями $a_r = \frac{r+r^{-1}}{2}$, $b_r = \left|\frac{r-r^{-1}}{2}\right|$, проходимый по часовой стрелке, при этом образом полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости будет часть эллипса, лежащая в нижней полуплоскости;

в) при $r = 1$ — дважды проходимый отрезок $[-1, 1]$.

Отметим, что под действием функции Жуковского окружности $|z| = r \neq 1$ и $|z| = r^{-1}$ переходят в один и тот же эллипс, только с разной ориентацией.

Найдем теперь образ луча $\arg z = \phi$, $\phi \in (-\pi, \pi]$. Луч считаем ориентированным по возрастанию r.

Рассмотрим сначала случай $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда образом данного луча будет:

а) при $\phi = 0$ — луч $[1, +\infty)$, проходимый дважды;

б) при $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ — правая ветвь гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 \phi} - \frac{v^2}{\sin^2 \phi} = 1, \tag{11.21}$$

ориентированная снизу вверх (в силу (11.20), образ луча $\arg z = \phi$ содержится в гиперболе (11.21), причем $u(r, \phi) > 0$, а $v(r, \phi)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, $v(r, \phi) < 0$ при $r < 1$, $v(r, \phi) > 0$ при $r > 1$, $v(1, \phi) = 0$);

в) при $\phi = \frac{\pi}{2}$ — мнимая ось $u = 0$, пробегаемая снизу вверх (поскольку $u(r, \frac{\pi}{2}) = 0$, а $v(r, \frac{\pi}{2})$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$).

Поскольку $u(r, \pi - \phi) = -u(r, \phi)$, $v(r, \pi - \phi) = v(r, \phi)$, образом луча $\arg z = \phi$ будет

г) при $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ — левая ветвь гиперболы (11.21), ориентированная снизу вверх

д) при $\phi = \pi$ — луч $(-\infty, -1]$, проходимый дважды.

Учитывая, что $u(r, -\phi) = u(r, \phi)$, $v(r, -\phi) = -v(r, \phi)$, получаем, что образы лучей $\arg z = \pm\phi$ совпадают, только для $\phi \in (-\pi, 0]$ они будут ориентированы сверху вниз.

Образы основных областей при отображении $w = \lambda(z)$. Рассмотрим области:

$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ — внешность единичного круга;

$D_2 = \{|z| < 1\}$ — внутренность единичного круга;

$D_3 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость;

$D_4 = \{\operatorname{Im} z < 0\}$ — нижняя полуплоскость;

$D_5 = \{\operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$;

$D_6 = \{\operatorname{Im} z < 0, |z| < 1\}$;

В силу пункта 2., в каждой из этих областей функция Жуковского однолистна, поэтому отображение $w = \lambda(z)$ конформно переводит D_j на

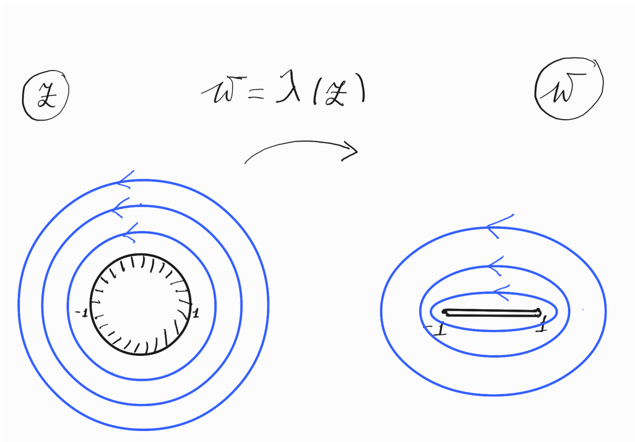


Рис. 11.7:

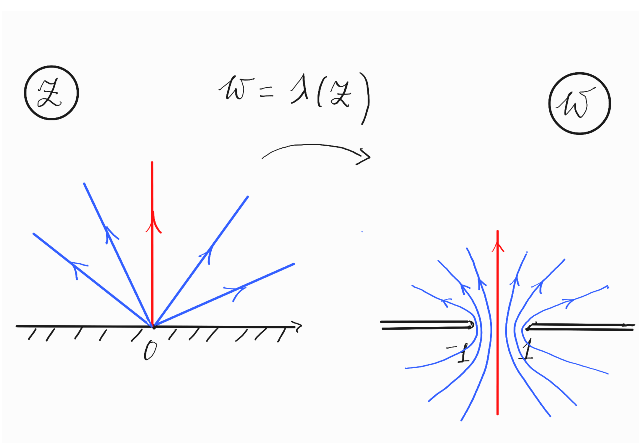


Рис. 11.8:

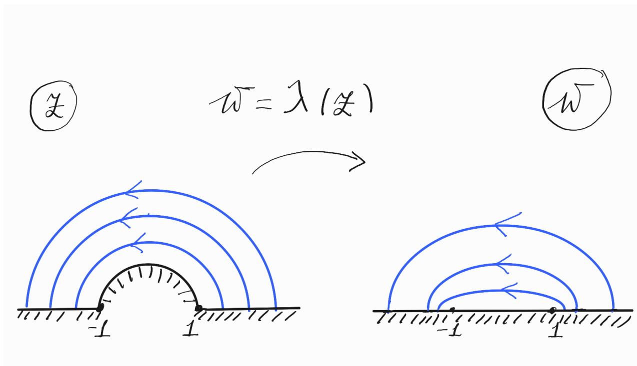


Рис. 11.9:

$G_j := \lambda(D_j)$, $1 \le j \le 6$. Так как $\lambda(z) = \lambda\left(\frac{1}{z}\right)$ и отображение $z \to \frac{1}{z}$ переводит D_1 на D_2, D_3 на D_4 и D_5 на D_6, то $G_1 = G_2$, $G_3 = G_4$, $G_5 = G_6$.

Чтобы найти G_1, заполним $D_1 \cap \mathbb{C}$ окружностями $|z| = r$, $r > 1$. Их образами будут эллипсы, которые заполнят $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (см. рис. 11.7). Так как $\lambda(\infty) = \infty$, то $G_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.

Чтобы найти G_3, заполним D_3 лучами $\arg z = \phi$, $0 < \phi < \pi$. Тогда их образы заполнят всю плоскость w, за исключением лучей $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ (см. рис.). Следовательно, $G_3 = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$.

Чтобы найти G_5, заполним D_5 полуокружностями $|z| = r, \operatorname{Im} z > 0$, $r > 1$. Их образами будут части эллипсов, лежащие в вержней полуплоскости, которые заполнят всю верхнюю полуплоскость (см. рис. 11.9). Следовательно, $G_5 = \{\operatorname{Im} w > 0\}$.

11.4.4 Тригонометрические и гиперболические функции

Данные функции являются суперпозициями уже рассмотренных в этой главе функций, так как

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \lambda(e^z), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = -i\lambda(ie^z),$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \lambda(e^{iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -i\lambda(ie^z).$$

Поскольку

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},$$

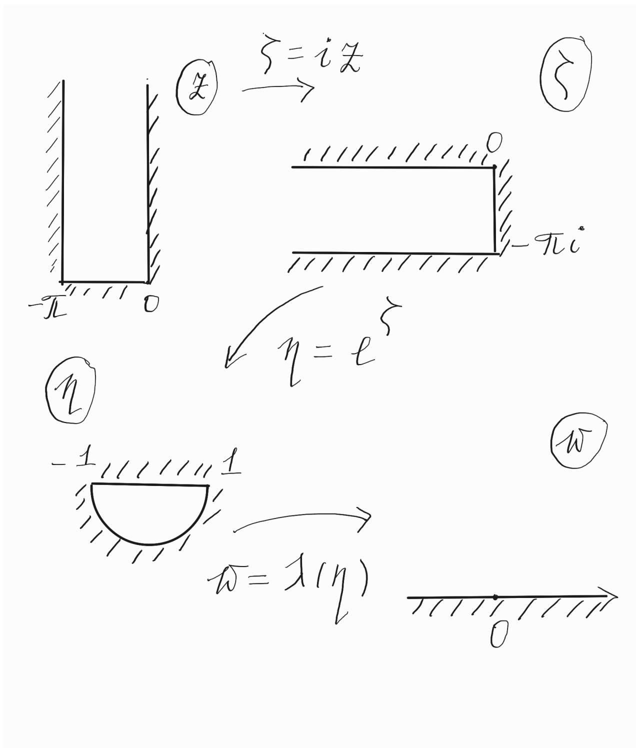


Рис. 11.10:

отображение $w = \operatorname{tg} z$ является суперпозицией трех отображений:

$$\zeta = 2iz, \quad \eta = e^{\zeta}, \quad w = -i\frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Найдем образ полуполосы $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ при отображении $w = \cos z$. Для этого представим данное отображение в виде суперпозиции:

$$\zeta = iz, \quad \eta = e^{\zeta}, \quad w = \lambda(\eta).$$

Последовательно применяя эти отображения, получаем, что образом данной области является верхняя полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ (см. рис. 11.10).

Глава 12

Аналитическое продолжение

Определение 49. Пусть функция $f(z)$ определена на множестве E, содержащемся в области $D \subset \mathbb{C}$. Функция $F \in \mathcal{O}(D)$ называется *аналитическим продолжением функции f в область* D, если

$$F(z) = f(z) \quad \text{в точках} \quad z \in E.$$

Из теоремы единственности для голоморфных функций (теорема 12 главы 5) следует, что если множество E имеет предельную точку, лежащую в области D, то функция f, определенная на множестве E имеет не более одного аналитического продолжения в область D.

12.0.1 Продолжение функций, представимых сходящимся рядом на интервале вещественной прямой

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad \text{где} \quad a, a_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \ldots. \tag{12.1}$$

с ненулевым радиусом сходимости R. Тогда ряд (12.1) сходится к некоторой функции $f(x)$ на интервале $E = (a-R, a+R)$ (если $R = \infty$, считаем $E = (-\infty, \infty)$). Положим $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$. В силу голоморфности суммы степенного ряда получаем, что $F \in \mathcal{O}(U_R(a))$. Следовательно, функция $F(z)$ является аналитическим продолжением функции $f(x)$ в круг $U_R(a)$. Так, например, функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ являются аналитическим продолжением функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ соответственно с прямой $\mathbb{R}$ на плоскость $\mathbb{C}$.

Из теоремы единственности следует, что тождества, справедливые для тригонометрических функций при действительных значениях параметра x остаются справедливыми и при комплексных значениях параметра z.

Покажем, например, что

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \quad \text{при} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

При действительных z_1 и z_2 формула следует из элементарной тригонометрии. Зафиксировав $z_1 \in \mathbb{R}$ получаем, что левая и правая части равенства являются целыми функциями от переменной z_2, совпадающими при $z_2 \in \mathbb{R}$. Из теоремы единственности следует, что обе части равенства совпадают для всех действительных z_1 и всех комплексных z_2.

Далее фиксируем $z_2 \in \mathbb{C}$. Так как обе части равенства являются целыми функциями от переменной z_1, совпадающими при $z_1 \in \mathbb{R}$, то, по теореме единственности получаем, что равенство справедливо для всех комплексных z_1, z_2.

12.1 Лемма о непрерывном продолжении, принцип симметрии и его применение для построения конформных отображений

Лемма 9 (Лемма о непрерывном продолжении). *Пусть область $D \subset \mathbb{C}$ имеет вид $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$, где D_1 и D_2 — области, лежащие в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, а γ — интервал (конечный или бесконечный) действительной прямой (см. рис. 12.1). Тогда, если функции $f_j \in \mathcal{O}(D_j) \cap C(D_j \cup \gamma)$, $j = 1, 2$ совпадают в точках кривой γ, то функция*

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), z \in D_1 \cup \gamma, \\ f_2(z), z \in D_2 \end{cases} \tag{12.2}$$

является аналитическим продолжением функций f_1 и f_2 в область D.

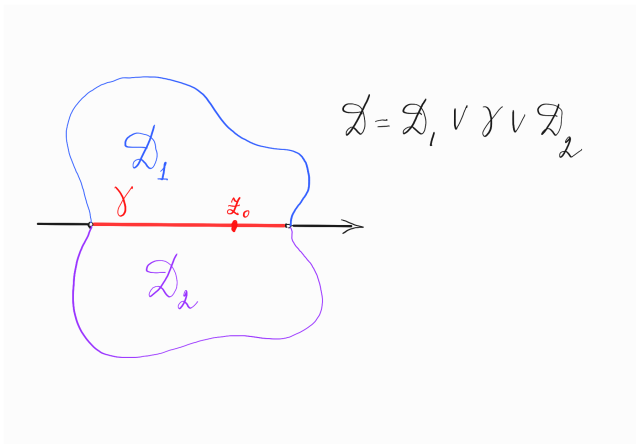


Рис. 12.1:

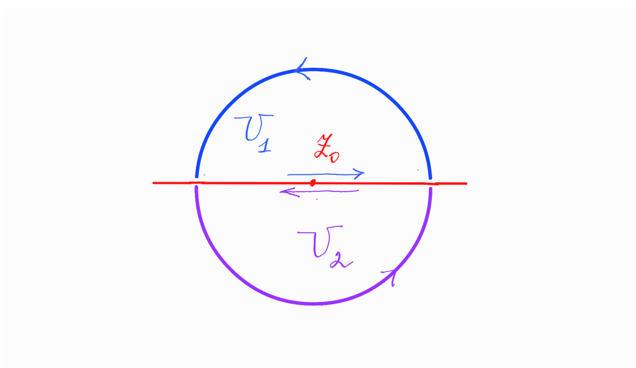


Рис. 12.2:

Доказательство. Нам нужно показать голоморфность функции $F(z)$ в области D. По условию (12.2), функция $F(z)$ непрерывна в D и голоморфна на объединении $D_1 \cup D_2$. Поэтому достаточно показать, что эта функция голоморфна в точках интервала γ. Пусть $z_0 \in \gamma$. Так как D является областью, то существует $U_r(z_0) \Subset D$. Положим $U_j = U_r(z_0) \cap D_j$, $j = 1, 2$. Так как $F \in C(\partial U_r(z_0))$ то выражение

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z_0)} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

является интегралом типа Коши, следовательно, $\Phi \in \mathcal{O}(U_r(z_0))$. Пусть

$z \in U_1 \cup U_2$. Добавляя и вычитая интеграл по общей части границы полукругов U_1 и U_2 (см. рис. 12.2), получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_1} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_2} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Воспользуемся обобщениями интегральной формулы Коши (замечание 5) и интегральной теоремы Коши (замечание 3). Тогда при $z \in U_1$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_1} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = F(z),$$

поскольку $z \in U_1$, $F \in \mathcal{O}(U_1) \cap C(\overline{U_1})$;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_2} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0,$$

поскольку подынтегральное выражение голоморфно в области U_2 и непрерывно в $\overline{U_2}$.

Таким образом, $\Phi(z) = F(z) + 0 = F(z)$ в точках полукруга U_1. Аналогично $\Phi(z) = F(z)$ в точках полукруга U_2. Так как $F \in C(U_r(z_0))$, то $\Phi(z) = F(z)$ и на общей части границы U_1 и U_2. Значит $F(z) = \Phi(z)$ всюду в $U_r(z_0)$ и $F \in \mathcal{O}(U_r(z_0))$. В силу произвольности точки $z_0 \in \gamma$ получаем, что F голоморфна во всех точках интервала γ. $\square$

Замечание 20. В предыдущем рассуждении множество γ может быть любым интервалом (не обязательно лежащем на действительной прямой) и даже кусочно-гладкой кривой, делящей область D на две области D_1 и D_2.

Предложение 55 (Принцип симметрии)**.** *Пусть области D, D_1, D_2 и интервал γ удовлетворяют условиям леммы 9, причем области D_1 и D_2 симметричны относительно оси абсцисс. Тогда, если функция $f \in \mathcal{O}(D_1) \cap C(D_1 \cup \gamma)$ принимает действительные значения на интервале γ, то функция*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), z \in D_1 \cup \gamma, \\ \overline{f(\bar{z})}, z \in D_2 \end{cases} \tag{12.3}$$

является аналитическим продолжением функции $f(z)$ в область D.

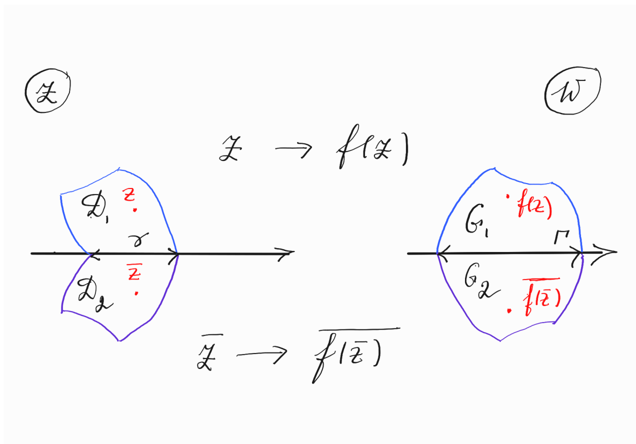


Рис. 12.3:

Доказательство. По условию, функция $\overline{f(\bar z)}$ непрерывна на множестве $D_2 \cup \gamma$ и совпадает с $f(z)$ в точках интервала γ. Поэтому, в силу леммы 9, достаточно показать, что $F \in \mathcal{O}(D_2)$. Пусть $z_0 \in D_2$. Так как функция f дифференцируема в точке $\zeta_0 = \bar z_0$, то в некоторой окрестности $U_\delta(\zeta_0)$ точки ζ_0 справедливо представление

$$f(\zeta) - f(\zeta_0) = f'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0) + o(|\zeta - \zeta_0|). \tag{12.4}$$

Подставим $\zeta = \bar z$ в (12.4). Так как $|\zeta - \zeta_0| = |z - z_0|$, в круге $U_\delta(z_0)$ имеем

$$f(\bar z) - f(\bar z_0) = f'(\bar z_0)(\bar z - \bar z_0) + o(|z - z_0|).$$

Беря комплексное сопряжение от обеих частей равенства, получаем

$$F(z) - F(z_0) = \overline{f'(\bar z_0)}(z - z_0) + \overline{o(|z - z_0|)}.$$

Таким образом, функция $F(z)$ дифференцируема в точке z_0 и имеет производную $F'(z_0) = \overline{f'(\bar z_0)}$. В силу произвольности точки z_0, в точках $z \in D_2$ имеем $F'(z) = \overline{f'(\bar z)}$, значит $F'(z)$ непрерывна в области D_2. Тем самым $F \in \mathcal{O}(D_2)$. □

Следствие 21. *Пусть области D, D_1, D_2 и интервал γ лежат в плоскости z, области G, G_1, G_2 и интервал Γ лежат в плоскости w, причем:*

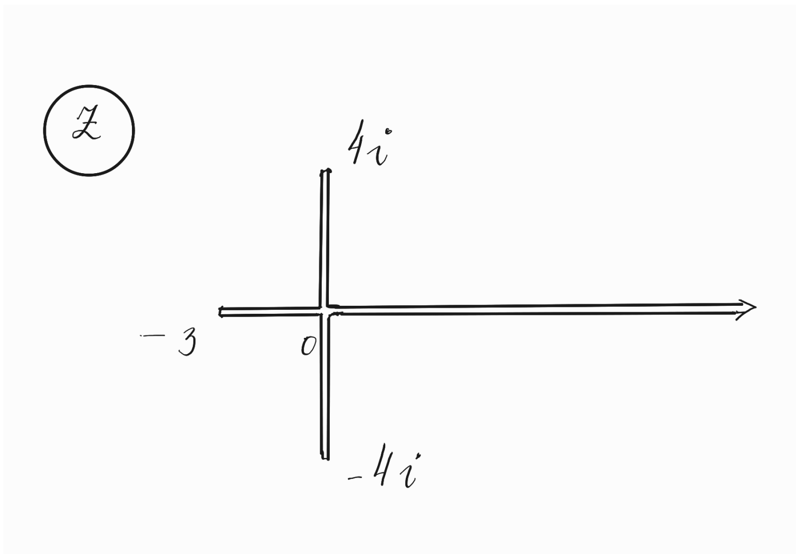


Рис. 12.4:

1) $D_1 \subset \{\operatorname{Im} z > 0\}$, γ лежит на оси x, D_2 симметрична D_1 относительно оси x, $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$;

2) $G_1 \subset \{\operatorname{Im} w > 0\}$, Γ лежит на оси u, G_2 симметрична G_1 относительно оси u, $G = G_1 \cup \Gamma \cup G_2$.

Тогда, если функция $f \in \mathcal{O}(D_1) \cap C(D_1 \cup \gamma)$ конформно отображает D_1 на G_1 и биективно переводит γ на Γ, то функция $F(z)$, определенная в (12.3) конформно отображает D на G (см. рис. 12.3).

Доказательство. В силу принципа симметрии, $F \in \mathcal{O}(D)$. По построению функция F однолистна в D и $F(D) = G$. Поэтому из предложения 48 получаем, что F конформно отображает D на G. $\square$

Покажем, как с помощью принципа симметрии конформно отобразить область $D = \mathbb{C} \setminus \{[-3, +\infty) \cup [-4i, 4i]\}$ (см. рис. 12.4) на верхнюю полуплоскость. Пусть D_1 — часть области D, лежащая в верхней полуплоскости, D_2 — область, симметричная D_1 относительно оси x. Пусть $\gamma = (-\infty, -3)$. Пометим “крестиком” точки, лежащие вблизи интервала γ и будем внимательно следить за их образами при выполнении последовательности конформных отображений. Функция $w_1 =$

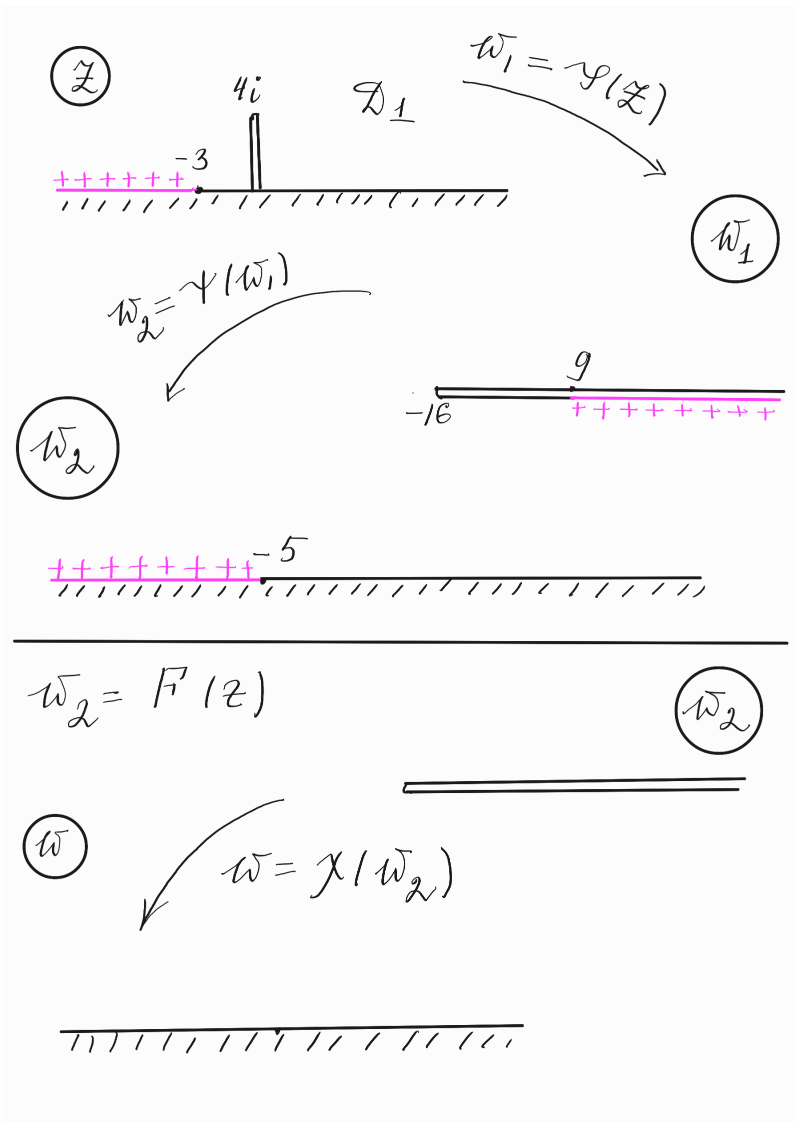


Рис. 12.5:

$\phi(z) = z^2$ конформно отображает D_1 на область Ω, равную всей плоскости w_1 без луча $[-16, +\infty)$, при этом γ биективно отобразится на интервал $\gamma_1 = (9, +\infty)$, образы точек, помеченных “крестиком” попадут в нижнюю полуплоскость (см. рис. 12.5). Функция $w_2 = \psi(w_1) = \sqrt{(w_1+16)} := \sqrt{|w_1+16|}e^{i\frac{\arg(w_1+16)}{2}}$, $0 < \arg(w_1+16) < 2\pi$ голоморфна в Ω, конформно отображает Ω на верхнюю полуплоскость и образы точек, помеченных “крестиком” лежат вблизи интервала $(-\infty, -5)$.

Положим $f(z) = \psi(\phi(z))$. Применив следствие 21, получаем, что отображение $w_2 = F(z)$, где

$$F(z) = \begin{cases} f(z), z \in D_1 \cup \gamma, \\ \overline{f(\bar{z})}, z \in D_2 \end{cases}$$

конформно переводит область D на всю плоскость w_2 без луча $[-5, +\infty)$ (в условиях следствия 21, G_1 и G_2 — верхняя и нижняя полуплоскости w_2 соответственно). Далее остается применить отображение

$$w = \chi(w_2) = \sqrt{w_2+5} := \sqrt{|w_2+5|}e^{i\frac{\arg(w_2+5)}{2}}, \quad 0 < \arg(w_2+5) < 2\pi.$$

12.2 Аналитическое продолжение Г-функции

В начале этой главы мы рассмотрели аналитическое продолжение функции, являющейся суммой степенного ряда на интервале действительной прямой, в круг сходимости данного ряда. Сейчас мы рассмотрим аналитическое продолжение гамма-функции, определенной ранее в курсе математического анализа интегралом, зависящим от действительного параметра x:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt. \tag{12.5}$$

Напомним, что интеграл (12.5) сходится на интервале $0 < x < +\infty$.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 10 (Голоморфная зависимость интеграла от параметра)**.** *Пусть $[a, b]$ — отрезок действительной прямой, D — область в $\mathbb{C}$, а функция $\phi(t, z)$ непрерывна на множестве $[a, b] \times D$ и голоморфна по $z \in D$ для каждого $t \in [0, 1]$. Тогда функция*

$$f(z) = \int_a^b \phi(t, z)dt$$

голоморфна в области D.

Доказательство. Прежде всего покажем, что $f \in C(D)$. Для этого достаточно показать, что функция $f(z)$ непрерывна в окрестности любой точки $z_0 \in D$. Рассмотрим круг $U_r(z_0) \Subset D$. По условию функция $\phi(t,z)$ непрерывна (следовательно, и равномерно непрерывна) на компакте $[a,b] \times \overline{U_r(z_0)}$. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0,r)$, что для всех z_1, $z_2 \in \overline{U_r(z_0)}$ таких, что $|z_1 - z_2| < \delta$ и для всех $t \in [a,b]$ справедливо неравенство $|\phi(t,z_1) - \phi(t,z_2)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Поэтому для таких z_1 и z_2 выполняется оценка

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int_a^b (\phi(t,z_1) - \phi(t,z_2))\, dz \right| \le \int_a^b |\phi(t,z_1) - \phi(t,z_2)|\, dt < \epsilon.$$

Таким образом, функция $f(z)$ равномерно непрерывна (следовательно, непрерывна) в $\overline{U_r(z_0)}$.

Для доказательства голоморфности функции $f(z)$ в области D воспользуемся теоремой Мореры (теорема 8 главы 4). Так как $f \in C(D)$, достаточно показать, что интеграл $\int_{\partial\Delta} f(\xi) d\xi = 0$ по границе любого треугольника $\Delta \Subset D$. Имеем:

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi) d\xi = \int_{\partial\Delta} \int_a^b \phi(t,\xi) dt d\xi = \int_a^b \int_{\partial\Delta} \phi(t,\xi) d\xi dt = \int_a^b 0 dt = 0.$$

Второе равенство следует из теоремы Фубини: поскольку подынтегральная функция $\phi(t,z)$ непрерывна на $[a,b] \times \partial\Delta$, можно менять местами пределы интегрирования. Третье равенство следует из интегральной теоремы Коши: $\int_{\partial\Delta} \phi(t,\xi) d\xi = 0$. □

Вернемся к Г-функции. Покажем, что $\Gamma(x)$ допускает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость. Представим $\Gamma(x)$ при $x > 0$ в виде суммы

$$\Gamma(x) = I_1(x) + I_2(x), \quad I_1(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt, \quad I_2(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

и осуществим аналитическое продолжение каждого из двух слагаемых. Положим

$$t^{z-1} := e^{(z-1)\ln t}, \quad t > 0.$$

Так заданная функция совпадает с t^{x-1} для $z = x \in \mathbb{R}$, непрерывна на множестве $0 < t < +\infty$, $z \in \mathbb{C}$ и является целой функцией относительно параметра z при каждом фиксированном $t > 0$.

Лемма 11. *Функция $I_2(x)$ аналитически продолжается до целой функции*

$$I_2(z) = \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{12.6}$$

Доказательство. Поскольку выражение (12.6) совпадает с $I_2(x)$ при $z = x \in \mathbb{R}$, достаточно показать, что функция $I_2(z)$ является целой. Так как

$$|t^{z-1}| = e^{\mathrm{Re}((z-1)\ln t)} = e^{(x-1)\ln t} = t^{x-1}$$

и интеграл $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, то в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ интеграл (12.6) сходится абсолютно[1]. Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad f_n(z) = \int_n^{n+1} t^{z-1}e^{-t}dt \tag{12.7}$$

сходится в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ к $I_2(z)$. В силу леммы 10, все члены этого ряда являются целыми функциями.

Покажем, что ряд (12.7) равномерно сходится внутри $\mathbb{C}$. Действительно, пусть $V \Subset \mathbb{C}$. Тогда V ограничено, следовательно, существует круг $U_R(0)$, содержащий V. Тем самым для любых $t \geq 1$ и $z \in V$ справедлива оценка

$$\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{x-1}e^{-t} \leq t^{R-1}e^{-t}.$$

Поэтому

$$\sup_{z\in V} |I_2(z) - \sum_{j=1}^{n} f_j(z)| = \sup_{z\in V} \left|\int_{n+1}^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt\right| \leq \int_{n+1}^{+\infty} t^{R-1}e^{-t}dt \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, ряд (12.7) равномерно сходится к $I_2(z)$ на множестве V. Поскольку V произвольно, ряд (12.7) равномерно сходится к $I_2(z)$ внутри $\mathbb{C}$. Так как все члены ряда являются целыми функциями, то из первой теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций получаем, что функция $I_2(z)$ целая. □

Лемма 12. *Функция $I_1(x)$ аналитически продолжается до функции*

$$I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}, \tag{12.8}$$

[1] Сходимость $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ следует из того, что функция $t^{x-1}e^{-t}$ непрерывна по t при $t \geq 1$ и для достаточно больших t ($t \geq t(x) \geq 1$) не превосходит $e^{-\frac{t}{2}}$

голоморфной всюду в $\mathbb{C}$ за исключением точек $0, -1, \ldots,$ *в которых она имеет полюса первого порядка, причем*

$$\operatorname{res}_{-n} I_1(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 0, 1 \ldots. \tag{12.9}$$

Доказательство. Зафиксируем $x > 0$. Тогда

$$I_1(x) = \int_0^1 t^{x-1}dt + \int_0^1 t^{x-1}(e^{-t} - 1)dt = \frac{1}{x} + \int_0^1 t^{x-1}(e^{-t} - 1)dt. \tag{12.10}$$

Запишем в виде ряда самое правое слагаемое в (12.10). Используя разложение $e^{-t} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n$, получаем

$$t^{x-1}(e^{-t} - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x-1}. \tag{12.11}$$

Так как

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x-1} \right| \leq \frac{1}{n!}, \quad \text{при} \quad t \in [0, 1], \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, то ряд (12.11) сходится равномерно (относительно t) на отрезке $[0, 1]$ по признаку Вейерштрасса. Поэтому возможно почленное интегрирование

$$\int_0^1 t^{x-1}(e^{-t} - 1)dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x-1}dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x-1}dt == \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}.$$

Подставив полученный ряд в (12.10), получаем

$$I_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}.$$

Таким образом, функция $I_1(z)$, определенная в (12.8), совпадает с $I_1(x)$ при $z = x > 0$.

Осталось проверить, что $I_1(z)$ голоморфна во всей комплексной плоскости за исключением точек 0, -1, $\ldots$, в которых у нее полюса первого порядка и с вычетами как в (12.9). Рассмотрим произвольный круг $U_{N+\frac{1}{2}}(0)$, $N \in \mathbb{N}$. Ряд

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

состоит из функций, голоморфных в данном круге и сходится в нем равномерно, поскольку при $z \in U_{N+\frac{1}{2}}(0)$ и $n \geq N+1$ справедливы оценки

$$|n+z| \geq n - |z| > N+1-\left(N+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}\right| \leq \frac{2}{n!}.$$

Поэтому, в силу первой теоремы Вейерштрасса, его сумма

$$g(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

голоморфна в круге $U_{N+\frac{1}{2}}(0)$.

Функция

$$h(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

голоморфна всюду в круге $U_{N+\frac{1}{2}}(0)$ за исключением точек 0, -1, $\ldots$, $-N$, в которых она имеет полюса первого порядка, причем

$$\operatorname{res}_{-n} g(z) = \lim_{z\to -n}(z+n)g(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, 0 \leq n \leq N.$$

Так как $I_1(z) = g(z) + h(z)$, то функция $I_1(z)$ тоже голоморфна всюду в круге $U_{N+\frac{1}{2}}(0)$ за исключением точек $0, -1, \ldots, -N$, в которых она имеет полюса первого порядка и в этих точках вычеты функций $I_1(z)$ и $h(z)$ совпадают, следовательно, имеет место (12.9). В силу произвольности $N \in \mathbb{N}$, предложение доказано. □

Применяя леммы 11 и 12, окончательно получаем

Следствие 22. *Функция $\Gamma(x)$ аналитически продолжается с интервала $(0, +\infty)$ до мероморфной на всей комплексной плоскости функции*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

с полюсами первого порядка в точках $0,\ -1,\ \ldots,$ *причем*

$$\operatorname{res}_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 0, 1 \ldots .$$