Методическое пособие по теме «ряды»

А.В.Домрина

Аннотация

Пособие предназначено для студентов, изучающих числовые и функциональные ряды, а также для преподавателей, ведущих практические занятия по этому разделу математического анализа. В первой главе содержатся необходимые теоретические сведения: формулировки основных утверждений и изучение основных рядов, используя которые и строится большая часть задач. Вторая глава состоит из 20 вариантов контрольных работ, немного различающихся по сложности. Третья глава содержит решение тех задач из вариантов, при решении которых из года в год допускаются одни и те же ошибки. Четвертая глава содержит ответы к задачам из второй главы.

Оглавление

Глава 1

Необходимые теоретические сведения.

1.1 Определение числового ряда, необходимое условие сходимости, критерий Коши.

Числовым рядом называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.1}$$

где a_n — числа, называемые членами ряда. Величины $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbf{N}$ называются частичными суммами ряда (1.1). Если последовательность $\{S_n\}$ сходится к числу S, то ряд (1.1) называется сходящимся, число S называют его суммой и пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если же последовательность $\{S_n\}$ не сходится к конечному пределу, то ряд (1.1) называется расходящимся.

Из определения следует, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Свойство линейности. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и λ, μ — произвольные числа, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ сходится и справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Отметим также, что сумма сходящегося и расходящегося рядов является расходящимся рядом.

Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд (1.1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Критерий Коши сходимости ряда. Ряд (1.1) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbf{N}$ такой, что для любых $n \geq N$ и $p \in \mathbf{N}$ справедлива оценка

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость геометрическую прогрессию $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$, $b_1 \neq 0$.

Решение. При $|q| \geq 1$ нарушается необходимое условие сходимости ряда, поскольку $|b_1 q^{n-1}| \geq |b_1| > 0$.

При $|q| < 1$ имеем $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_1 q^{k-1} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$, таким образом ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$.

Ответ. Ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$, при этом сумма ряда равна $\frac{b_1}{1-q}$.

Замечание. В примере 1 ряд сходится тогда и только тогда, когда выполнено необходимое условие сходимости. Однако это условие не является достаточным в общем случае (см. пример 2 ниже).

Пример 2. Показать, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя для него выполнено необходимое условие сходимости.

Решение. Необходимое условие сходимости выполнено, поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Расходимость ряда следует из отрицания критерия Коши. Действительно, беря $\epsilon = \frac{1}{2}$ и для любого $N \in \mathbb{N}$ полагая $n = p = N$, имеем

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2} = \epsilon.$$

Мы воспользовались тем, что сумма выше содержит p слагаемых, минимальное из которых равно $\frac{p}{n+p}$.

1.2 Ряды с неотрицательными членами, признаки сравнения, Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса, интегральный признак сходимости.

Признак сравнения. Пусть, начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbf{N}$, выполняется оценка $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Следствие. Если числа a_n, b_n положительны начиная с некоторого $n_0 \in \mathbf{N}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0, \tag{1.2}$$

то есть $a_n \sim cb_n$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Из следствия выше получаем, что эквивалентные ряды с положительными членами сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$ для всех n и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Признак Коши (радикальный). Пусть $a_n \geq 0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Признак Раабе. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $p > 1$ и расходится, если $p < 1$.

Признак Гаусса. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ может быть представлено в виде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\epsilon}},$$

где $\epsilon > 0$, λ, μ — фиксированные числа и последовательность $\{\gamma_n\}$ ограничена (то есть $\frac{\gamma_n}{n^{1+\epsilon}} = O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)$).

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\lambda > 1$ или при $\lambda = 1$, $\mu > 1$ и расходится при $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu \leq 1$.

Интегральный признак сходимости. Пусть $f(x)$ — положительная монотонно убывающая функция на промежутке $[m, +\infty)$ для некоторого натурального m. Тогда ряд $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_m^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 3. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

При $p \leq 0$ ряд расходится, ибо не выполнено необходимое условие сходимости, $\frac{1}{n^p} \geq 1$. При $p > 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ — положительная и монотонно убывающая на луче $[0, +\infty)$, тем самым, согласно интегральному признаку сходимости, ряд сходится одновременно с интегралом $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, который, в свою очередь, сходится $\iff p > 1$.

Ответ. Ряд сходится $\iff p > 1$.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln^b n}$.

Положим $a_n = \frac{1}{n^a \ln^b n}$.

При $b = 0$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ сходится при $a > 1$ и расходится при $a \leq 1$ согласно примеру выше.

Пусть $b \neq 0$. Так как для любого $\delta > 0$ предел $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\delta} = 0$, то начиная с некоторого номера $n_0(\delta) \geq 2$ имеем

$$\frac{1}{n^{a+|b|\delta}} \leq \frac{1}{n^a \ln^{|b|} n} \leq a_n \leq \frac{\ln^{|b|} n}{n^a} \leq \frac{1}{n^{a-|b|\delta}}.$$

Если $a > 1$, то число $p = a - |b|\delta > 1$ для достаточно малых δ. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, то ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ также сходится по признаку сравнения.

Если $a < 1$, то число $p = a + |b|\delta < 1$ для достаточно малых δ. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится, то ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ также расходится по признаку сравнения.

Если $a = 1$, то при $b \leq 0$ имеем $a_n \geq \frac{1}{n}$, поэтому ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ расходится. При $b > 0$, числа a_n положительны и монотонно убывают, следовательно ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ сходится одновременно с интегралом $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^b x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^b}$, который сходится при $b > 1$.

Ответ. При $a > 1$ ряд сходится при любом b, при $a < 1$ ряд расходится при любом b, при $a = 1$ ряд сходится при $b > 1$ и расходится при $b \leq 1$.

1.3 Ряды с членами произвольного знака, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле-Абеля.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Абсолютно сходящиеся ряды сходятся.

Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то его называют *сходящимся условно.*

Признак Лейбница. Пусть числа p_n положительны и монотонно сходятся к нулю. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}p_n = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \ldots$$

сходится.

Пример 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

Решение. При $p \leq 0$ ряд расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости. При $p > 0$ последовательность $\frac{1}{n^p}$ монотонно сходится к нулю, поэтому ряд сходится по признаку Лейбница.

Ряд сходится абсолютно $\iff$ $p > 1$ (см. пример 3).

Ответ. Ряд сходится абсолютно при $p > 1$, условно при $p \in (0, 1]$ и расходится при $p \leq 0$.

Признак Дирихле-Абеля сходимости числового ряда. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ достаточно выполнения одной из двух пар условий:

I. a) частичные суммы $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены в совокупности, б) последовательность $\{b_n\}$ монотонно сходится к нулю.

II. а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, б) последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена.

Пример 6. Получить оценки для частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ **в случаях:**

a) $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
b) $a_n = \sin nx,\ x \in [0, 2\pi)$;
c) $a_n = \cos nx,\ x \in (0, 2\pi)$;
d) $a_n = (-1)^n \sin nx,\ x \in (-\pi, \pi]$;
e) $a_n = (-1)^n \cos nx,\ x \in (-\pi, \pi)$.

В случае a) $a_{4n+1} = a_{4n+4} = 1$, $a_{4n+2} = a_{4n+3} = -1$, $n \in \{0 \cup \mathbb{N}\}$. Поэтому $S_n \in \{1, -1, 0\}$, следовательно $|S_n| \leq 1$.

В случае b) при $x = 0$ все $S_n = 0$.

Если же $x \neq 0$, то $\sin(x/2) \neq 0$, поэтому

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin kx \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x)}{2\sin(x/2)} =$$

$$= \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}.$$

Таким образом $|S_n| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$ для всех натуральных n при $x \in (0, 2\pi)$.

В случае c) $\sin(x/2) \neq 0$, поэтому

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cos kx \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x)}{2\sin(x/2)} =$$

$$= \frac{\sin(n+1/2)x - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

Таким образом $|S_n| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$ для всех натуральных n при $x \in (0, 2\pi)$.

В случае d) при $x = \pi$ все $S_n = 0$. Если же $x \neq \pi$, то при $y = x + \pi$ имеем $\sin(y/2) = \cos(x/2) \neq 0$. Так как $\sin ky = (-1)^k \sin kx$, то $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \sin ky$. Рассуждая аналогично b), получаем $|S_n| \leq \frac{1}{\sin(y/2)} = \frac{1}{\cos(x/2)}$.

В случае e) как и в случае d) полагаем $y = x + \pi$. Далее рассуждая аналогично c), получаем $|S_n| \leq \frac{1}{\cos(x/2)}$.

Ответ a) $|S_n| \leq 1$, b) если $x = 0$, то $S_n = 0$, если $x \in (0, 2\pi)$, то $|S_n| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$, c) $|S_n| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$, d) если $x = \pi$, то $S_n = 0$, если $x \neq \pi$, то $|S_n| \leq \frac{1}{\cos(x/2)}$, e) $|S_n| \leq \frac{1}{\cos(x/2)}$.

Пример 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$, $x \in (0, 2\pi)$

1) При $x = \pi$ имеем $\sin nx = 0$, $\cos nx = (-1)^n$, поэтому первый из рядов сходится абсолютно для любого p, второй сходится абсолютно при $p > 1$ и условно при $p \in (0, 1]$ (см. пример 5).

2) Рассмотрим случай $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Пусть $p \leq 0$. Так как $x \neq \pi$, то последовательности $\{\sin nx\}$, $\{\cos nx\}$ не сходятся к нулю, поэтому оба ряда расходятся, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Пусть $p > 0$. Так как для любого натурального n справедливы оценки $|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$, $|\sum_{k=1}^{n} \cos kx| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$ (см. пример 6), а последовательность $\frac{1}{n^p}$ монотонно стремится к нулю, то оба ряда сходятся, так как для них выполнена первая пара условий признака Дирихле-Абеля.

Исследуем оба ряда на абсолютную сходимость. Если $p > 1$, то так как $\frac{|\sin nx|}{n^p} \leq \frac{1}{n^p}$, $\frac{|\cos nx|}{n^p} \leq \frac{1}{n^p}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится (см. пример 3), получаем, что оба ряда сходятся абсолютно.

Если же $p \in (0, 1]$, то из оценок

$$|\sin nx| \geq \sin^2 nx = \frac{1 - \cos 2nx}{2}, |\cos nx| \geq \cos^2 nx = \frac{1 + \cos 2nx}{2},$$

получаем:

$$\frac{|\sin nx|}{n^p} \geq \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p}, \frac{|\cos nx|}{n^p} \geq \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p}. \qquad (1.3)$$

Так как $\sin x \neq 0$, то, заменяя в рассуждениях выше x на $2x$, получаем что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^p}$ сходится. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится, то оба исходных ряда абсолютно расходятся.

Ответ. При $x = \pi$ первый из рядов сходится абсолютно для любого p, второй сходится абсолютно при $p > 1$ и условно при $p \in (0, 1]$. При $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ оба ряда сходятся абсолютно при $p > 1$ и условно при $p \in (0, 1]$.

1.4 Бесконечные произведения.

Бесконечным произведением называется выражение

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n. \qquad (1.4)$$

Величины $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$, $n \in \mathbf{N}$ называются частичными произведениями. Если последовательность $\{P_n\}$ сходится к числу $P \neq 0$, то произведение (1.4) называется сходящимся, число P называют его значением и пишут $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$. Если последовательность $\{P_n\}$ не сходится к конечному пределу, или сходится к нулю, то произведение (1.4) называется расходящимся.

Далее считаем, что все множители в бесконечном произведении (1.4) отличны от нуля.

Необходимое условие сходимости бесконечного произведения. Если произведение (1.4) сходится, то $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

Далее считаем, что все множители в бесконечном произведении (1.4) положительны.

Критерий сходимости бесконечного произведения. Бесконечное произведение (1.4) в котором все множители положительны, сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n. \tag{1.5}$$

Поскольку у сходящихся бесконечных произведений общий множитель стремится к единице, будем записывать бесконечное произведение в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n). \tag{1.6}$$

Согласно сказанному выше, мы предполагаем, что $u_n > -1$ для всех натуральных n.

Если, начиная с некоторого номера n_0, все числа u_n в произведении (1.6) одного знака (то есть либо все неотрицательны, либо все неположительны), то бесконечное произведение (1.6) сходится в том и только том случае, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если же числа u_n имеют разные знаки, то справедливо

Утверждение. Пусть $u_n > -1$ для всех натуральных n и сходится один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$. Тогда сходимость другого ряда необходима и достаточна для сходимости бесконечного произведения (1.6).

Бесконечное произведение (1.4) называется *абсолютно сходящимся*, если абсолютно сходится ряд (1.5). Если бесконечное произведение сходится, но абсолютно расходится, оно называется *условно сходящимся*. Абсолютно сходящиеся произведения сходятся. Бесконечное произведение (1.6) абсолютно сходится в том и только том случае, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

1.5 Равномерная сходимость. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле-Абеля равномерной сходимости, свойства равномерно сходящихся рядов.

Пусть на некотором множестве D задана последовательность функций $\{f_n(x)\}$.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве D, если для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N = N(\epsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$ и всех $x \in D$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Для равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на множестве D необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{1.7}$$

Отметим, что величина $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$ для некоторых значений n может равняться бесконечности, важно, чтобы она принимала конечные значения, начиная с некоторого номера n_0.

Признак равномерного стремления к нулю функциональной последовательности. Если последовательность $\{\phi_n(x)\}$ определена на множестве D и существует числовая последовательность $\{p_n\}$ такая, что

$$|\phi_n(x)| \leq p_n \text{ для всех } x \in D, \lim_{n\to\infty} p_n = 0, \tag{1.8}$$

то последовательность $\{\phi_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на множестве D.

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \tag{1.9}$$

члены которого определены на множестве D называется *равномерно сходящимся* к сумме $S(x)$ на D, если последовательность $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ его частичных сумм сходится равномерно к $S(x)$ на множестве D.

Отметим, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на равномерную сходимость.

Критерий Коши равномерной сходимости ряда. Для равномерной сходимости ряда (1.9) на множестве D необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовал номер $N = N(\epsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$, всех натуральных p и всех $x \in D$ выполнялось неравенство

$$|a_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

Необходимое условие равномерной сходимости ряда. Если ряд (1.9) сходится равномерно на множестве D, то функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на множестве D.

Признак Вейерштрасса. Пусть ряд (1.9) определен на множестве D и существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, что в каждой точке $x \in D$ выполнена оценка $|a_n(x)| \leq p_n$. Тогда ряд (1.9) сходится равномерно на множестве D.

Признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости. Пусть ряд (1.9) и числовая последовательность $\{b_n(x)\}$ определены на множестве D. Тогда для равномерной сходимости на множестве D ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

достаточно выполнения одной из двух пар условий:

I. а) Последовательность частичных сумм ряда (1.9) равномерно ограничена на множестве D, то есть существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)| \leq M$.

б) Последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна в каждой точке $x \in D$ и равномерно сходится к нулю на множестве D.

II. а) Ряд (1.9) сходится равномерно на множестве D.

б) Последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна в каждой точке $x \in D$ и равномерно ограничена на множестве D, то есть существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $|b_n(x)| \leq M$.

Теорема о предельном переходе для функциональных рядов. Пусть ряд (1.9) сходится равномерно на D к функции $S(x)$ и x_0 — предельная точка множества D. Если для каждой функции $a_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ существует конечный предел $\lim_{x \to x_0, x \in D} a_n(x) = c_n$, то

а) сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, б) существует предел $\lim_{x\to x_0, x\in D} S(x)$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0, x\in D} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Следствие теоремы о предельном переходе. Пусть ряд (1.9) сходится на интервале (a, b) и все его члены непрерывны на отрезке $[a, b]$. Тогда если ряд расходится хотя бы в одном из концов отрезка $[a, b]$, то он сходится неравномерно на интервале (a, b).

Пример 8. Исследовать на равномерную сходимость на множестве X ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, где а) $X = [\delta, 2\pi-\delta]$, $\delta \in (0,\pi)$ — фиксированное число, б) $X = (0, 2\pi)$.

Решение. Из предыдущего примера следует, что оба ряда сходятся на интервале $(0, 2\pi)$.

а) Покажем, что оба ряда сходятся равномерно. Действительно, беря $M = \frac{1}{\sin(\delta/2)}$ и используя оценки b), c) из примера 6 получаем, что для всех $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq M, |\sum_{k=1}^{n} \cos kx| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq M,$$

поэтому частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ равномерно ограничены на X. Последовательность $\frac{1}{n}$ монотонно сходится к нулю и не зависит от переменной x, поэтому она равномерно сходится к нулю на X. Тем самым оба исходных ряда сходятся равномерно на множестве X, так как они удовлетворяют первой паре условий признака Дирихле-Абеля.

б) Покажем, что оба ряда сходятся неравномерно на множестве $X = (0, 2\pi)$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Будем рассуждать как при доказательстве расходимости гармонического ряда с помощью отрицания критерия Коши. Возьмем $\epsilon = \frac{1}{4}$. Тогда для любого номера N при $n = p = N$ и $x = \frac{\pi}{6n}$ имеем $n + p = 2n$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx}{k} > \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4} = \epsilon. \tag{1.10}$$

(При доказательстве оценки (1.10) мы пользовались тем, что $\frac{\pi}{6} < \frac{k\pi}{6n} \leq \frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2} < \sin \frac{k\pi}{6n}$ при $n + 1 \leq k \leq 2n$.)

Неравномерную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ на множестве $X = (0, 2\pi)$ можно доказать совершенно аналогично, но мы приведем рассуждение, опирающееся на следствие теоремы о предельном переходе. Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ сходится на интервале $(0, 2\pi)$, все члены ряда — непрерывные функции на отрезке $[0, 2\pi]$, а при $x = 0$ ряд расходится, так как является гармоническим. Поэтому из следствия теоремы о предельном переходе получаем, что ряд сходится неравномерно на интервале $(0, 2\pi)$.

Ответ. а) оба ряда сходятся равномерно, б) оба ряда сходятся неравномерно.

Теорема о непрерывности суммы ряда. Пусть ряд (1.9) сходится равномерно на D к функции $S(x)$ и все функции $a_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ непрерывны на множестве D. Тогда $S(x)$ также непрерывна на D.

Часто бывает нужно исследовать на непрерывность сумму функционального ряда на интервале (a, b), где $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Поскольку $(a, b) = \cup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)}[\alpha, \beta]$, то для непрерывности суммы ряда на интервале (a, b) достаточно показать непрерывность суммы ряда на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Таким образом, справедливо

Следствие. Пусть на интервале (a, b) задан сходящийся ряд (1.9), в котором все функции $a_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ непрерывны на (a, b). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, то сумма ряда (1.9) непрерывна на интервале (a, b).

Теорема о почленной дифференцируемости ряда. Пусть на отрезке $[a, b]$ задан ряд (1.9), в котором все функции $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ дифференцируемы на $[a, b]$. Если ряд (1.9) сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, то на $[a, b]$ ряд (1.9) сходится равномерно к дифференцируемой функции, причем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x).$$

Часто бывает нужно исследовать на дифференцируемость сумму функционального ряда на интервале (a, b), где $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Поскольку $(a, b) = \cup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)}[\alpha, \beta]$, то для дифференцируемости суммы ряда на интервале (a, b) достаточно показать дифференцируемость суммы ряда на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Таким образом, справедливо

Следствие. Пусть на интервале (a, b) задан сходящийся ряд (1.9), в котором все функции $a_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ дифференцируемы на (a, b). Если ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, то сумма ряда (1.9) дифференцируема на (a, b), причем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x).$$

1.6 Степенные ряды. Определение, формула Коши-Адамара, функциональные свойства степенных рядов, поведение в граничных точках (вторая теорема Абеля).

Определение. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots, \tag{1.11}$$

где коэффициенты c_n, число a, называемое *центром ряда* (1.11) и переменная x являются, вообще говоря, комплексными числами.

Теорема Коши-Адамара. Положим

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{1.12}$$

Тогда степенной ряд (1.11) сходится абсолютно при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$. Число R называется *радиусом сходимости* ряда (1.11), равенство (1.12) называется *формулой Коши-Адамара.*

Для нахождения радиуса сходимости часто используется следующее

Утверждение. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{1.13}$$

Далее считаем, что коэффициенты c_n ряда (1.11), его центр a и переменная x вещественны, а его радиус сходимости R положителен. Тогда справедливы следующие утверждения:

Вторая теорема Абеля. Если степенной ряд (1.11) сходится в точке $a+R$, то он сходится равномерно на отрезке $[a, a+R]$, в частности

$$\lim_{x\to a+R-0}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n. \tag{1.14}$$

Если степенной ряд (1.11) сходится в точке $a-R$, то он сходится равномерно на отрезке $[a-R, a]$, в частности

$$\lim_{x\to a-R+0}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(-R)^n. \tag{1.15}$$

Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда. Сумма степенного ряда (1.11) бесконечно дифференцируема внутри интервала сходимости $|x-a|<R$, причем

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}, \tag{1.16}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}, \tag{1.17}$$

где $k\in\mathbb{N}$, $k>1$. Радиусы сходимости рядов в правой части (1.16), (1.17) тоже равны R.

Теорема о почленном интегрировании степенного ряда. Внутри интервала сходимости $|x-a|<R$ степенной ряд можно почленно интегрировать, то есть

$$\int_a^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-a)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}. \tag{1.18}$$

При этом радиус сходимости ряда в правой части (1.18) тоже равен R.

Пусть $f(x)$— сумма ряда (1.11). Из соотношений (1.16), (1.17) следует, что

$$c_0 = f(a), c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 1, 2, \ldots$$

Пусть функция $g(x)$ имеет в точке a производные любого порядка. *Рядом Тейлора функции $g(x)$ с центром в точке a* называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Справедливо

Утверждение. Ряд (1.11) является рядом Тейлора своей суммы с центром в точке a

1.7 Основные разложения в степенной ряд некоторых элементарных функций, тейлоровские разложения.

Приведем без доказательства разложения в ряд Тейлора основных элементарных функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.19}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.20}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.21}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.22}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.23}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \tag{1.24}$$

Если $m = 0, 1, \dots,$ то разложение справедливо при $-\infty < x < \infty$.

В остальных случаях: Если $m \le -1$, то разложение справедливо при $-1 < x < 1$,

Если $-1 < m < 0$, то разложение справедливо при $-1 < x \le 1$,

Если $m > 0$ нецелое, то разложение справедливо при $-1 \le x \le 1$.

Пример 9. Разложить функцию $\ln(1+x)$ в степенной ряд по степеням x и найти, где разложение справедливо.

Решение. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, имеем

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n. -1 < t < 1. \tag{1.25}$$

Так как степенной ряд почленно интегрируем внутри интервала сходимости, то при $-1 < x < 1$ справедливо

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{1.26}$$

Поскольку при почленном интегрировании радиус сходимости не меняется, то ряд в правой части (1.26) сходится при $-1 < x < 1$ и расходится при $|x| > 1$. При $x = 1$ ряд в правой части (1.26) сходится по признаку Лейбница. Используя вторую теорему Абеля, имеем

$$\ln 2 = \lim_{x \to 1-0} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

отсюда (1.25) справедливо при $x = 1$. При $x = -1$ ряд в правой части (1.25) расходится.

Ответ. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \ -1 < x \leq 1.$

Пример 10. Разложить функцию $\operatorname{arctg} x$ **в степенной ряд по степеням** x **и найти, где разложение справедливо.**

Решение. Беря в (1.25) t^2 вместо t, получаем

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, -1 < t < 1.$$

Рассуждая как в предыдущей задаче, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \tag{1.27}$$

ряд в правой части (1.27) сходится при $-1 < x < 1$ и расходится при $|x| > 1$. При $x = \pm 1$ ряд в правой части (1.27) сходится по признаку Лейбница. Используя вторую теорему Абеля, имеем

$$\operatorname{arctg} 1 = \lim_{x \to 1-0} \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = \lim_{x\to -1+0} \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}.$$

Таким образом разложение (1.27) справедливо на отрезке $[-1, 1]$.

Ответ. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,\ -1 \le x \le 1.$

Глава 2

Варианты контрольных работ

Задачи, помеченные *, приведены с решениями, которые содержатся в главе 3.

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2}{2\sqrt{n}}$.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin n}{n}\right)e^{\frac{\sin n}{n}}$.

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ на множестве X, где а) $X=[1,2]$, б) $X=[0,+\infty)$.

5. Исследовать функцию $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$ на дифференцируемость на интервале $(0,2\pi)$.

6. Разложить в степенной ряд с центром в нуле функцию $f(x)=(x+2)\ln(x+2), x\neq-2$, $f(-2)=0$. Указать, где разложение справедливо.

Вариант 2.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\sin\frac{1}{n}$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

4*. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\pi nx}{n^2+x^2}$ на множестве X, где а) $X=[\frac{1}{2},1]$ б) $X=[0,2]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n\ln^2 n}$ и исследовать его сумму на непрерывность во внутренних точках множества X.

6. Разложить в степенной ряд с центром в нуле функцию $f(x) = (x+1)\sin^3 x$. Указать, где разложение справедливо.

Вариант 3.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n+1}{n(a\ln^3 n+1)}$, $a \geq 0$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi\sqrt{n^2+4}) \sin\frac{1}{n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3*. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a\cos n}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}}$, $|a| \leq 1$.

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{xn}}{n^2x^2+1}$ на множестве X, где а) $X = [1,2]$, б) $X = [0,1]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{2^n}\right)^n$ и исследовать его сумму на непрерывность во внутренних точках множества X.

6. Разложить в степенной ряд с центром в точке $a = -1$ функцию $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{3x+4}}$, найти радиус сходимости полученного ряда.

Вариант 4.

1*. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n! n^{3/2} 2^n}{7\cdot 9\cdots(2n+5)}$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на множестве X, где а) $X = [-1,1]$, б) $X = (-\infty, +\infty)$.

5. Исследовать сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx+\frac{1}{n})}{n}$ на непрерывность на интервале $(0, 2\pi)$.

6. Разложить в степенной ряд с центром в нуле функцию $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{1-x^4} + \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x^2$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

Вариант 5.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sh}^{\alpha}(\ln n)$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha}+(-1)^n}$.

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x} e^{-\frac{n^2}{x}}$ на множестве X, где а) $X = [1,2]$, б) $X = (0, +\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\sqrt{x+\sin^2\frac{x}{n}}$ и исследовать его сумму на непрерывность на множестве X.

6. Разложить в степенной ряд с центром в нуле функцию $\frac{d^2}{dx^2}\left(x\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$. Найти множество точек на котором разложение справедливо.

Вариант 6.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}\right)^{n^5}$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\frac{1}{n^2})}{n\ln n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$.

4*. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x}\cos nx}{\sqrt{n}}$ на множестве X, где а) $X=[\frac{\pi}{2},\pi]$, б) $X=(0,\pi]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x^n+x^{-n}}}{2^n}$ и исследовать его сумму на непрерывность во внутренних точках X.

6. Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=\arccos\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ с центром в нуле. Указать множество сходимости полученного ряда.

Вариант 7.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\left(1-\cos(e^{-\frac{n}{2}})\right)$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin n\operatorname{arctg} n$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^a}{n^a+\cos n}$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{n}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X=[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$, б) $x=[0,2\pi]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2\ln^3(n+1)}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

6. Разложить функцию $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-x}{x}$ в степенной ряд с центром $a=1$ и указать радиус сходимости ряда.

Вариант 8.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{5\cdot 11\cdots(5n+6)}{6\cdot 11\cdots(6n+5)}}$

2. Исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n^3}{n\ln^2 n}$ на абсолютную и условную сходимость

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}n^{\frac{(-1)^n}{n^a}}$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\sqrt{n+x}} \sin^2 \frac{x}{n}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = [1, 2]$ б) $X = [2, +\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \cos \frac{1}{n}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

6. Найти множество сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+(-3)^n}{n+1} \cos \frac{1}{n}(x+1)^n$.

Вариант 9.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdots(3n+4)}{n!} \arcsin \frac{1}{2^n}$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos^2 n}{n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos^2 nx}{n^x}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = [\frac{\pi}{2}, \pi]$, б) $X = (0, \pi]$.

5. Исследовать на дифференцируемость на интервале $(0, 2\pi)$ сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \operatorname{arctg} n}{n\sqrt{n}}$.

6. Найти множество сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+(-1)^n 5}{4+3(-1)^{n+1}}\right)^n (x+3)^{2n+1}$.

Вариант 10.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(-1)^n}{n \ln n}\right)$.

4*. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + x\sqrt{n})(1 - \cos \frac{1}{nx})$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = (0, 1)$, б) $X = (1, +\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

6. Найти множество сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4(-1)^n)^n}{n \ln(n+1)} (x-1)^{n^3}$.

Вариант 11.

1*. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n^2+n})}{\ln(n+1)}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n \ln n}\right)$

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n}$ на множестве X, где а) $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, б) $X = (0, \pi)$.

5. Исследовать на непрерывность сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n+\sin nx}$ на интервале $X = (0, 2\pi)$.

6. Разложить функцию $f(x) = \ln(x + \sqrt{4+x^2})$ в степенной ряд с центром в нуле. Найти множество, на котором разложение справедливо.

Вариант 12.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right)$.

2*. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n^{\frac{5}{6}}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^\alpha}{n^\alpha + \sin n}\right)$

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \sin nx$ на множестве X, где а) $X = [\frac{\pi}{2}, \pi]$, б) $X = [0, \pi]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \operatorname{ch} n$ и исследовать его сумму на непрерывность во внутренних точках множества X.

6. Разложить функцию $f(x) = x(1-x)^{-3}$ в степенной ряд с центром в точке $a = -1$ и найти множество, на котором разложение справедливо.

Вариант 13.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n \ln^a n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{an^2+bn+1}\right)$, $a, b \geq 0$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cos nx}{n e^{nx}}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = [\frac{\pi}{2}, \pi]$, б) $X = (0, \pi]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ и исследовать его сумму на непрерывность на множестве X.

6*. Найти множество сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-3)^{3n+1}$.

Вариант 14.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+(-1)^n}{2^n}\right) n \ln n$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right)^a$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^2 \ln n}\right)$

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{n^{\frac{3}{4}}}$ на равномерную сходимость на множестве X где а) $X = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, б) $X = (0, \pi)$.

5*. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^3}}{n}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

6. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+(-1)^n)^n}{n}(x-1)^{2n+1}$.

Вариант 15.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} \ln(1+4^{-n})$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos^3 n}{n \ln n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n^2}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = [-10, 10]$, б) $X = (-\infty, \infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость во внутренних точках X.

6. Разложить функцию $f(x) = \ln(x^2+5x+6)$ в ряд по степеням $x+1$ и указать, где разложение справедливо.

Вариант 16.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sh}\sqrt{\frac{n+4}{4n+1}}\right)^n$.

2*. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}+\sin n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^p \ln(n+1)}\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{x}{n+x}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = [0, 1]$, б) $X = [0, +\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ и исследовать сумму ряда на непрерывность во внутренних точках X.

6. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+4(-1)^n}{3+2(-1)^{n+1}} \sin\frac{1}{n}(x+3)^{4n}$.

Вариант 17.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\cdot 7 \cdots (3n+4)}{3\cdot 7 \cdots (4n+3)}\right)^a n^{-p}$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\frac{1}{\ln 2n}) \cos\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2-n+1}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin(\frac{|\cos n|}{n})\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\operatorname{arctg}(n^2+x^2)$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X=[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, б) $X=(0,2\pi)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ и исследовать его на дифференцируемость во внутренних точках X.

6. Разложить функцию $f(x)=\frac{3-8x}{6x^2-5x+1}$ в степенной ряд по степеням x. Указать, где разложение справедливо.

Вариант 18.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)$

2*. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\operatorname{arctg} n^2}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{\frac{(-1)^n}{n}}$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X=(0,1)$, б) $X=(1,+\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ и исследовать сумму ряда на дифференцируемость во внутренних точках X.

6. Разложить функцию $f(x)=\frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}$в ряд по степеням x . Указать, где разложение справедливо.

Вариант 19.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\ln n}$

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln^2 n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\sin\frac{x}{n}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X=[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$, б) $X=(0,2\pi)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n\ln n}$ и исследовать сумму ряда на дифференцируемость во внутренних точках X.

6*. Разложить функцию $f(x)=x\ln(x+\sqrt{x^2+2})$ в ряд по степеням x . Указать, где разложение справедливо.

Вариант 20.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n!)^3}{5\cdot 19\cdots(2n^3+3)}$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\sqrt{\ln^2 n+1}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right)$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X=[-100,100]$, б) $X=(-\infty,+\infty)$.

5*. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-x^2}$ и исследовать сумму ряда на непрерывность во внутренних точках X.

6. Разложить функцию $f(x)=\ln\frac{2x+1}{x+1}$ в степенной ряд с центром $a=1$. Указать, где разложение справедливо.

Глава 3

Разбор некоторых задач из контрольных работ с указанием типичных ошибок, которые встречаются в аналогичных примерах.

Задача 1. (1, вар. 11) Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}.$$

Решение. Положим $a_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$. Поскольку $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$, то

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}.$$

Так как $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, то

$$n^2\ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = n^2\left(-\frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = -\frac{1}{6} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Поэтому $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{1}{6}} < 1$, тем самым исходный ряд сходится по признаку Коши.

Ответ. Ряд сходится.

Замечание к задаче 1. Иногда из эквивалентности $n\sin\frac{1}{n} \sim 1$ ошибочно выводят $a_n \sim 1^{n^3} = 1$. На самом деле $a_n \sim e^{-\frac{n}{6}}$.

Задача 2. (1, вар. 4) Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!n^{3/2}2^n}{7\cdot 9\cdots(2n+5)}.$$

Решение. Полагая $a_n = \frac{n!n^{3/2}2^n}{7\cdot 9\cdots(2n+5)}$, имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^{\frac{3}{2}}(2n+7)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}2(n+1)} = \left(1+\frac{7}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Поскольку $(1+\frac{1}{n})^{-\frac{5}{2}} = 1 - \frac{5}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$, имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\frac{7}{2n}\right)\left(1-\frac{5}{2n}+O(\frac{1}{n^2})\right) = 1+\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2}).$$

В обозначениях признака Гаусса $\lambda = \mu = 1$, следовательно исходный ряд расходится.

Ответ. Ряд расходится.

Общее замечание к задачам на исследование абсолютной и условной сходимости. Часто при исследовании рядов на абсолютную и условную сходимость ошибочно путают понятия сходимости и условной сходимости (видимо подразумевая, что ряд условно сходится если он "хоть как-то сходится"). В результате получаются заключения вида: "Ряд сходится условно. Проверим его теперь на абсолютную сходимость". **Так нельзя!** Ряд сходится условно, если он сходится, но абсолютно расходится.

Задача 3 (2, вар. 12) Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n^{\frac{5}{6}}}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение. Пусть $a_n = \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n^{\frac{5}{6}}}$.

1. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Так как $\sin^2 n = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2n}{2}$, то $a_n = \frac{1}{2}(b_n + c_n)$, где $b_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{5}{6}}}$, $c_n = \frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{n^{\frac{5}{6}}}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Лейбница. Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ представим $c_n = u_n v_n$, где $u_n = (-1)^{n-1}\cos 2n$, $v_n = n^{-\frac{5}{6}}$. Так как $|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos 2k| \le \frac{1}{\cos 1}$, $n \in \mathbb{N}$ (см. пример 6 главы 1), то частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ограничены в совокупности. Также последовательность $\{v_n\}$ монотонно сходится к нулю, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, так как для него выполнена первая пара условий признака Дирихле-Абеля. Из свойства линейности получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно расходится. Представим $|a_n|$ в виде $|a_n| = \frac{1}{2}(d_n - e_n)$, где $d_n = n^{-\frac{5}{6}}$, $e_n = \frac{\cos 2n}{n^{\frac{5}{6}}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ расходится (см. пример 3 главы 1), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ сходится по признаку Дирихле-Абеля (см. пример 7 главы 1). Так как разность расходящегося и сходящегося рядов расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

3. Итак, исходный ряд сходится и абсолютно расходится, значит он сходится условно.

Ответ. Ряд сходится условно.

Замечание. Так как ряд в условии задачи 3 имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n p_n$, где $\{p_n\}$ — положительная, сходящаяся к нулю последовательность, то нередко делается вывод, что данный ряд сходится по признаку Лейбница. Но признак Лейбница здесь неприменим, так как последовательность p_n не является монотонной.

Задача 4 (2, вар. 16) Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}+\sin n}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение. Пусть $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}+\sin n}$. Тогда

$$a_n = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} \left(1 + \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-1} = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} \left(1 - \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} + O\left(\frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}} \left(1 + O\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)\right).$$

(Мы применили разложение $(1+x)^{-1} = 1 = x + O(x^2)$ при $x = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$.)

Положим $b_n = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$, $c_n = b_n - a_n = \frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}\left(1 + O\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Дирихле-Абеля (см. пример 7 главы 1). Так как $c_n \geq 0$ для достаточно больших n и $c_n \sim \frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}$ по признаку сравнения для знакопостоянных рядов.

Представим, как в предыдущей задаче,

$$\frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{n}} - \frac{\cos 2n}{2\sqrt[3]{n}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}$ расходится (см. пример 3 главы 1). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2\sqrt[3]{n}}$ сходится по признаку Дирихле-Абеля (см. пример 7 главы 1). Отсюда ряд $\frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}$ расходится как разность расходящегося и сходящегося рядов, следовательно и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ тоже расходится. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - c_n)$ расходится.

Ответ. Ряд расходится.

Замечание. При решении подобных задач часто из верного заключения $a_n \sim \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ и сходимости ряда $\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ часто делается неверный (для рядов с членами произвольного знака) вывод о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Мы же при решении предыдущей задачи использовали рассуждение об эквивалентных рядах для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ с **неотрицательными** начиная с некоторого номера n членами.

Задача 5 (2, вар. 18) Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\operatorname{arctg} n^2}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение. Пусть $a_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}}$, $b_n = \operatorname{arctg} n^2$. Тогда исходный ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

а) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Во-первых $|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}| \le 1$, $n \in \mathbb{N}$ (см. пример 6 главы 1). Во-вторых последовательность $\{\frac{1}{\sqrt{n+n^{-1}}}\}$ монотонно убывает к нулю. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, так как для него выполнена первая пара условий признака Дирихле-Абеля.

б) Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а последовательность $\{b_n\}$ монотонно возрастает к $\frac{\pi}{2}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, так как для него выполнена вторая пара условий признака Дирихле-Абеля.

в) Исследуем исходный ряд на абсолютную сходимость. Поскольку $|a_n b_n| = \frac{\operatorname{arctg} n^2}{\sqrt{n+n^{-1}}} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ расходится (см. пример 3 главы 1), то исходный ряд абсолютно расходится.

Ответ. Ряд сходится условно.

Замечание В предыдущем примере мы показали сходимость ряда в два шага а), б). Можно было бы доказать его сходимость за один шаг, используя только первую пару условий признака Дирихле-Абеля, именно представив общий член ряда в виде $u_n v_n$, где $u_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $v_n = \frac{\operatorname{arctg} n^2}{\sqrt{n+n^{-1}}}$. Но тогда потребовалась бы дополнительная проверка монотонности последовательности $\{v_n\}$ начиная с некоторого номера n_0.

Задача 6 (3, вар. 3) Исследовать на абсолютную и условную

сходимость бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a\cos n}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}}, |a|\le 1.$$

Решение. Пусть $p_n=\left(1-\frac{a\cos n}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}}$. Так как $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)$, то при $x=-\frac{a\cos n}{\sqrt{n}}$ имеем

$$\ln p_n=\ln\left(1-\frac{a\cos n}{\sqrt{n}}\right)+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}=(1-a)\frac{\cos n}{\sqrt{n}}-\frac{a^2\cos^2 n}{2n}+O\left(\frac{a^3\cos^3 n}{n\sqrt{n}}\right).$$

Если $a=0$, то $\ln p_n=\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ сходится условно (см. пример 7 главы 1), следовательно исходное произведение сходится условно.

Если $a\neq 0$, то беря

$$b_n=(1-a)\frac{\cos n}{\sqrt{n}}, c_n=b_n-\ln p_n=\frac{a^2\cos^2 n}{2n}\left(1+O\left(\frac{a\cos n}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится. Поскольку $c_n\ge 0$ начиная с некоторого n и $c_n\sim\frac{a^2\cos^2 n}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$. (Расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ следует из того, что $\frac{\cos^2 n}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{\cos 2n}{2n}$, гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ сходится.) Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-c_n)$ расходится, поэтому исходное произведение также расходится.

Ответ. При $a=0$ произведение сходится условно, при $0<|a|\le 1$ произведение расходится.

Замечание. В решении предыдущей задачи, как и при решении задачи 4, недостаточно исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a)\cos n}{\sqrt{n}}$, эквивалентный ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$, так как они не являются знакопостоянными.

Задача 7 (4, вар. 2) Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\pi nx}{n^2+x^2}$ на множестве X, где а) $X=[\frac{1}{2},1]$, б) $X=(0,2)$.

Решение. Проверим сначала, что исходный ряд сходится в каждой точке $x\in X=(0,2)$. Представим $a_n(x)=\frac{n\sin\pi nx}{n^2+x^2}=u_n(x)v_n(x)$, где $u_n(x)=\frac{\sin\pi nx}{n}$, $v_n(x)=\frac{n^2}{n^2+x^2}$. Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi nx$ ограничены в совокупности:

$$|\sum_{k=1}^{n}\sin\pi kx|\le\frac{1}{\sin(\pi x/2)}, n\in\mathbb{N}, \tag{3.1}$$

последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ монотонно сходится к нулю, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, так как удовлетворяет первой паре условий признака Дирихле-Абеля сходимости числового ряда. Поскольку последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонно стремится к единице, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится, так как для него выполнена вторая пара условий признака Дирихле-Абеля сходимости числового ряда.

а) Покажем, что исходный ряд сходится равномерно на $X = [\frac{1}{2}, 1]$. Рассмотрим сначала ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Рассуждая как в примере 8 главы 1, получаем, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X = [\frac{1}{2}, 1]$ справедлива оценка

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin(\pi k x)| \leq M = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}, \tag{3.2}$$

Также последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ не зависит от x и монотонно сходится к нулю. Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X, так как он удовлетворяет первой паре условий признака Дирихле-Абеля равномерной сходимости. Так как $v_n(x) = \frac{1}{1+(x/n)^2}$, то $\{v_n(x)\}$ монотонна в каждой точке $x \in X$ и равномерно ограничена ($|v_n(x)| \leq 1$). Таким образом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X, так как для него выполнена вторая пара условий признака Дирихле-Абеля равномерной сходимости.

б) Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится неравномерно на $X = (0, 2)$. Будем рассуждать как в примере 8 главы 1. Действительно, беря $\epsilon = \frac{1}{12}$, при любом $N \in \mathbb{N}$ для $n = p = N$, $x_n = \frac{1}{6n}$ при $n+1 \leq k \leq 2n$ справедливы оценки $\sin \pi k x_n > \frac{1}{2}$, $\frac{k}{k^2+x_n^2} > \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{3n}$, поэтому $a_k(x_n) \geq \frac{1}{6k}$.

Следовательно

$$a_{n+1}(x_n) + \cdots + a_{2n}(x_n) \geq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \geq \frac{1}{12} = \epsilon,$$

тем самым ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ не сходится равномерно в силу отрицания критерия Коши.

Ответ. а) сходится равномерно, б) сходится неравномерно.

Замечание Сравнивая (3.2), (3.1) видно, что оценка (3.2) — **равномерная**, поскольку величина $M = \sqrt{2}$ не зависит от точки $x \in X = [\frac{1}{2}, 1]$. Оценка (3.1) равномерной не является, поскольку величина $\frac{1}{\sin(\pi x/2)}$ уже зависит от точки $x \in X = (0, 2)$. Более того, эту оценку нельзя сделать равномерной, поскольку $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sin(\pi x/2)} = +\infty$. Из дальнейших рассуждений в пункте б) видно, что исходный ряд действительно сходится неравномерно.

Задача 8 (4, вар. 6) Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} e^{-n^2 x}$ на множестве X, где а) $X = [\frac{\pi}{2}, \pi]$, б) $X = (0, \pi]$.

Решение. Покажем, что исходный ряд сходится в каждой точке $x \in (0, \pi]$. Пусть $a_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} e^{-n^2 x}$. Так как $\sqrt[n]{|a_n(x)|} \leq \sqrt[n]{e^{-n^2 x}} \to 0$ при $n \to \infty$, то по признаку Коши исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно.

а) Поскольку для всех точек $x \in X = [\frac{\pi}{2}, \pi]$ справедлива оценка

$$|a_n(x)| \leq e^{-n^2 x} \leq e^{-n^2 \pi/2} = c_n,$$

причем $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} e^{-n\pi/2} = 0$, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Коши, следовательно исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса на множестве $X = [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

б) Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится неравномерно на множестве $X = (0, \pi]$. Применим следствие теоремы о предельном переходе для интервала $(a, b) = (0, \pi)$. Так как все члены $a_n(x) = e^{-n^2 x} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ непрерывны на отрезке $[0, \pi]$, а в точке $x = 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится неравномерно на интервале $(0, \pi)$, а значит и на содержащем его множестве X.

Ответ. а) сходится равномерно, б) сходится неравномерно.

Замечание 1. Отметим, что в задаче 8, так же, как и в задаче 7, в случае а) есть равномерная оценка (c_n не зависит от x, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится), а в случае б) равномерной оценки нет, поскольку $\sup_{x\in X} |a_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Замечание 2. Мы показали, что в задаче 8б) отсутствие равномерной сходимости легко вытекает из следствия теоремы о предельном переходе. Отметим, что это следствие очень часто применяется на практике, при исследовании равномерной сходимости ряда на интервале полезно посмотреть поведение ряда в граничных точках интервала.

Задача 9 (4, вар. 10) Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + x\sqrt{n})(1 - \cos \frac{1}{nx})$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = (0, 1)$, б) $X = (1, +\infty)$.

Решение. Пусть $a_n(x) = (1 + x\sqrt{n})(1 - \cos \frac{1}{nx})$. Так как в обоих случаях $x > 0$ и $0 \leq 1 - \cos \frac{1}{nx} = 2 \sin^2 \frac{1}{2nx} \leq \frac{1}{2n^2 x^2}$, то

$$0 \leq a_n(x) \leq \left(1 + x\sqrt{n}\right) \frac{1}{2n^2 x^2} = \frac{1}{2n^2 x^2} + \frac{1}{2n^{3/2} x}. \tag{3.3}$$

Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 x^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2} x}$ сходятся (см. пример 3 главы 1), то исходный ряд сходится при $x > 0$.

Покажем, что в случае а) ряд сходится неравномерно. Действительно, поскольку $a_n(\frac{1}{n}) = (1+n^{-1/2})2\sin^2\frac{1}{2} > 2\sin^2\frac{1}{2}$, то нарушается необходимое условие равномерной сходимости: общий член исходного ряда не сходится равномерно к нулю на $(0,1)$.

Покажем, что в случае б) ряд сходится равномерно. Так как при $x > 1$ в силу (3.3) справедлива оценка

$$0 \le a_n(x) \le \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^{3/2}} = c_n$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса на интервале $(1,\infty)$.

Ответ. а) сходится неравномерно, б) сходится равномерно.

Замечание. На примере предыдущей задачи мы видим, что при исследовании ряда на равномерную сходимость бывает полезно проверить, выполнено ли необходимое условие равномерной сходимости. В предыдущей задаче отсутствие равномерной сходимости в случае а) действительно следовало из неравномерного на $(0,1)$ стремления к нулю общего члена. Однако равномерное стремление к нулю общего члена — **только необходимое, но вообще говоря не достаточное** условие равномерной сходимости ряда, если оно выполнено, то ряд не обязательно сходится (тем более равномерно) на данном множестве. Например, в случае б) задачи 8 справедлива оценка $|a_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$, следовательно $a_n(x)$ равномерно сходится к нулю на множестве $X = (0,\pi]$ (см. достаточное условие равномерной сходимости). Однако ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится неравномерно на X.

Задача 10 (5, вар. 20) Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-x^2}$ и исследовать сумму ряда на непрерывность на множестве X.

Решение. 1. Покажем, что ряд сходится на множестве

$$X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Действительно, ряд не определен в точках $\{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. Если же $x \in X$, то все члены ряда $a_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-x^2}$ определены в точке x и при $n \ge 2|x|$ справедливо: $n^2 - x^2 \ge \frac{3}{4}n^2$, $0 < a_n(x) < \frac{\pi/2}{3n^2/4} = \frac{2\pi}{3n^2}$, следовательно исходный ряд сходится.

2. Покажем, что для любого положительного числа M исходный ряд сходится равномерно на любом множестве $X_M = X \cap (-M, M)$. Рассуждая как выше, получаем, что при $x \in X_M$, $n \ge 2M$ справедлива оценка

$0 < a_n(x) < \frac{2\pi}{3n^2}$, следовательно исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса (мы учли, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на равномерную сходимость).

3. Возьмем любую точку $x \in X$ и число $M > |x|$. Тогда $x \in X_M$. Поскольку все члены исходного ряда непрерывны на X_M и ряд сходится на этом множестве равномерно, то, по теореме о непрерывности суммы функционального ряда, сумма исходного ряда непрерывна на X_M, а значит и в точке x.

Ответ. Ряд сходится на множестве $X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. Сумма ряда непрерывна на X.

Замечание. На примере предыдущей задачи видно, что сумма ряда может быть непрерывной и в том случае, если не все условия теоремы о непрерывности суммы ряда выполнены на всем множестве сходимости. Действительно, на $X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 - x^2}$ сходится неравномерно, ибо $\sup_{x \in X} |\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 - x^2}| = +\infty$, следовательно общий член ряда не сходится равномерно к нулю, тем самым нарушено необходимое условие равномерной сходимости ряда. Тем не менее сумма ряда непрерывна на множестве X. Для доказательства используется локальный вариант теоремы о непрерывности: для каждой точки $x \in X$ строится такая ее окрестность (в данном случае это $X_M = X \cap (-M, M)$ для достаточно большого M), в которой ряд сходится равномерно. По теореме о непрерывности сумма исходного ряда непрерывна в этой окрестности, а значит и в точке x.

Задача 11 (5, вар. 14) Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^3}}{n}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

Решение. 1. Покажем, что множество сходимости ряда — интервал $(0, +\infty)$. Пусть $a_n(x) = \frac{e^{-n^2 x^3}}{n}$. Если $x \le 0$, то $a_n(x) \ge \frac{1}{n}$, значит исходный ряд расходится по признаку сравнения. Если же $x > 0$, то $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx^3}}{\sqrt[n]{n}} = 0$, следовательно исходный ряд сходится по признаку Коши. Таким образом, ряд сходится $\iff x > 0$.

2. Пусть $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$. Покажем, что $S(x)$ дифференцируема на интервале $(0, +\infty)$. В силу следствия теоремы о почленной дифференцируемости, нам достаточно показать, что ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta < +\infty$. Поскольку $|a_n'(x)| = 3nx^2 e^{-n^2 x^3} \le 3n\beta^2 e^{-n^2 \alpha^3} = c_n$ для любого $x \in [\alpha, \beta]$, причем $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n\beta^2} e^{-n\alpha^3} = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится

по признаку Коши, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha, \beta]$ по признаку Вейерштрасса.

Ответ. Ряд сходится на множестве $X = (0, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на множестве X.

Задача 12 (6, вар. 13) Найти множество сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-3)^{3n+1}$.

Решение. Исходный ряд сходится $\iff$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-3)^{3n}. \tag{3.4}$$

Сделаем замену $y = (x-3)^3$ и исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} y^n. \tag{3.5}$$

Пусть $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, R — радиус сходимости ряда (3.5). Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2n+2)!}{((n+1)!)^2(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{n+1} = 4,$$

следовательно ряд (3.5) сходится абсолютно при $|y| < 4$ и расходится при $|y| > 4$. При $|y| = 4$ имеем

$$\left| \frac{a_{n+1}y^{n+1}}{a_n y^n} \right| = \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$$

таким образом ряд (3.5) расходится, так как общий член не стремится к нулю. Мы получили, что ряд (3.5) сходится $\iff$ $|y| < 4$. Отсюда ряд (3.4), а следовательно и исходный ряд сходится $\iff$ $|x-3|^3 < 4$, то есть $x \in (3 - \sqrt[3]{4}, 3 + \sqrt[3]{4})$.

Ответ. Множество сходимости ряда — интервал $x \in (3 - \sqrt[3]{4}, 3 + \sqrt[3]{4})$.

Задача 13 (6, вар. 19) Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $f(x) = x\ln(x + \sqrt{x^2+2})$. Указать, где разложение справедливо.

Решение. Пусть $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$. Тогда

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Воспользуемся разложением

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^n, \tag{3.6}$$

и учтем, что радиус сходимости ряда в правой части (3.6) равен 1. Беря $y = \frac{x^2}{2}$ в разложении (3.6), имеем

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!} x^{2n}, \tag{3.7}$$

при этом радиус сходимости ряда в правой части (3.7) равен $\sqrt{2}$. Поскольку при почленном интегрировании радиус сходимости не меняется, то

$$\ln(x+\sqrt{x^2+2}) - \ln\sqrt{2} = \int_0^x g'(t)dt = \frac{x}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1},$$

$$x\ln(x+\sqrt{x^2+2}) = x\ln\sqrt{2} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!(2n+1)} x^{2n+2}, \tag{3.8}$$

при этом разложение (3.8) справедливо при $|x| < \sqrt{2}$, а при $|x| > \sqrt{2}$ ряд в правой части расходится. Рассмотрим поведение этого ряда при $|x| = \sqrt{2}$. Он будет сходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!(2n+1)} 2^{n+1} = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n,$$

где $b_n = \sqrt{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \frac{3}{2} > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Раабе, следовательно ряд (3.8) сходится абсолютно при $|x| = \sqrt{2}$. Из второй теоремы Абеля и непрерывности функции $f(x)$ при $x = \pm\sqrt{2}$ получаем, что разложение (3.8) справедливо при $|x| \le \sqrt{2}$.

Ответ. $x\ln(x+\sqrt{x^2+2}) = x\ln\sqrt{2} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!(2n+1)} x^{2n+2}$, разложение справедливо при $|x| \le \sqrt{2}$.

Глава 4

Ответы

Вариант 1. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится абсолютно. 3. Произведение сходится абсолютно. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. Сумма ряда дифференцируема на $(0, 2\pi)$. 6.

$$f(x) = (x+2)\ln(x+2) = 2\ln 2 + x(\ln 2 + 1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}(n-1)n} x^n,$$

$-2 \le x \le 2$ (мы считаем, что $f(-2) = \lim_{x\to -2+0} f(x) = 0$).

Вариант 2. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение расходится. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = \mathbb{R}$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$(x+1)\sin^3 x = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 - 3^{2n-1}}{4(2n-1)!} x^{2n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 - 3^{2n-1}}{4(2n-1)!} x^{2n}.$$

Вариант 3. 1. Ряд сходится $\iff$ $a \ne 0$. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно при $a = 0$ и расходится при $a \ne 0$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = (-1, 1)$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\frac{2x+3}{\sqrt{3x+4}} = 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} 3^{n-1}(3-2n)(x+1)^n,$$

радиус сходимости ряда равен $\frac{1}{3}$.

Вариант 4. 1. Ряд расходится. 2. Ряд расходится. 3. Произведение сходится абсолютно. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. Сумма ряда непрерывна на $(0, 2\pi)$. 6.

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6n+1}x^{12n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6n+5}x^{12n+10},$$

радиус сходимости ряда равен 1.

Вариант 5. 1. Ряд сходится $\iff$ $\alpha < -2$. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = [0, +\infty)$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(16n+12)x^{4n+1},$$

множество сходимости ряда — интервал $(-1, 1)$.

Вариант 6. 1. Ряд сходится. 2 Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $p > 1$, условно при $p \in (\frac{1}{2}, 1]$. 4а) Ряд сходится равномерно. 4б) Ряд сходится неравномерно. 5. $X = (\frac{1}{4}, 4)$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\arccos\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}}x^{2n+1},$$

множество сходимости — отрезок $[-3, 3]$.

Вариант 7. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. 4а) Ряд сходится равномерно. 4б) Ряд сходится равномерно. 5. $X = \mathbb{R}$, сумма ряда дифференцируема на X. 6.

$$\operatorname{arctg}\frac{2-x}{x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}(x-1)^{2n+1},$$

радиус сходимости ряда равен 1.

Вариант 8. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится абсолютно. 3. Произведение сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $\alpha \in (0, 1]$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = (1, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6. $[-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4})$.

Вариант 9. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. Сумма ряда дифференцируема на $(0, 2\pi)$. 6. $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

Вариант 10. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а). Ряд сходится неравномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $X = (0, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6. $(0, 2)$.

Вариант 11. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а) Ряд сходится равномерно. 4б) Ряд сходится неравномерно. 5. Сумма ряда непрерывна на $(0, \pi)$. 6.

$$\ln(x + \sqrt{4 + x^2}) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1},$$

разложение справедливо при $x \in [-2, 2]$.

Вариант 12. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $X = (1, +\infty)$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{2^{n+4}} (x+1)^n,$$

разложение справедливо на интервале $(-3, 1)$.

Вариант 13. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится абсолютно при $a > 1$, условно при $a \leq 1$. 3 При $a > 0$ произведение сходится абсолютно для любого b, при $a = 0$ произведение сходится условно при $b > 0$ и расходится при $b = 0$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $X = \mathbb{R}$, сумма ряда непрерывна на $\mathbb{R} \setminus 0$ и разрывна в нуле. 6. $(3 - \sqrt[3]{4}, 3 + \sqrt[3]{4})$.

Вариант 14. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится абсолютно при $a > \frac{1}{2}$, условно при $a \in (0, \frac{1}{2}]$. 3. Произведение сходится абсолютно при $|x| \leq 1$, расходится при $|x| > 1$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = (0, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6 $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Вариант 15. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = [0, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на $(0, +\infty)$. 6.

$$\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)(x+1)^n,$$

$x \in (-2, 0]$.

Вариант 16. 1. Ряд сходится. 2. Ряд расходится. 3. Произведение сходится абсолютно при $p > 1$, условно при $p \in [\frac{1}{2}, 1]$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, сумма ряда непрерывна на X. 6. $(-4, -2)$.

Вариант 17. 1. При $a > 0$ ряд сходится для любого p, при $a < 0$ ряд расходится для любого p, при $a = 0$ ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение расходится . 4а). Ряд сходится равномерно. 4б) Ряд сходится неравномерно. 5. $X = \mathbb{R}$, сумма ряда дифференцируема на X. 6.

$$\frac{3 - 8x}{6x^2 - 5x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} + 3^n\right) x^n,$$

$x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Вариант 18. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а). Ряд сходится неравномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $X = (0, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6.

$$\frac{3x + 8}{(2x - 3)(x^2 + 4)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} x^{2n+1},$$

$x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Вариант 19. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение расходится. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $X = (0, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6.

$$x \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) = x \ln \sqrt{2} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!(2n+1)} x^{2n+2},$$

$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Вариант 20. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $|x| < 1$, расходится при $|x| \geq 1$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1 \pm 2 \ldots\}$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\ln \frac{2x + 1}{x + 1} = \ln \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{4^n - 3^n}{6^n} (x - 1)^n,$$

$-\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{2}$.